



## 超大质量双黑洞系统 (Supermassive Black Holes Binary) 的演化

### 前言

引力波是爱因斯坦广义相对论的重要预言之一。引力波是以光速传播的时空波，与电磁波类似。直接探测引力波非常困难，然而，首个引力波讯号于 2015 年 9 月 14 日由激光干涉引力波天文台 (LIGO) 及处女座干涉仪 (VIRGO) 联合观测发现。

大质量物体的迅速运动会辐射引力波。两个超大质量黑洞 (Supermassive Black Holes (简称 SBH)) 合并是最强大的引力波波源。根据广义相对论的预测，黑洞是极端高密度物体，其质量可能非常大。在本题解答中不再需要黑洞其它特有的性质。

在普遍接受的星系演化理论中，假设星系中心存在超大质量黑洞 (SBH)，其质量约为  $10^5 - 10^9$  倍太阳质量。星系是巨大的恒星系统，拥有  $10^{10} - 10^{11}$  颗恒星。在演化过程中，两个星系会碰撞并合并为一。起初分别位于两个星系中心的两个超大质量黑洞 (SBH) 会怎样演化呢？超大质量双黑洞系统 (the SBH binary) 的演化可分为三个主要阶段。在每一阶段，尽管彼此表现的物理现象不同，但是两个超大质量黑洞 (SBH) 都会互相靠近。在本题的前三部分，我们将会分别处理这些现象。在第四部分，我们将会利用所获得的关系，以计算超大质量双黑洞系统 (SBH binary) 演化的总时间。

当演化结束，两个超大质量黑洞 (SBH) 会最终互相靠近，并合并为一个黑洞。合并过程持续约一小时，其间会伴随爆发强烈的引力辐射。未来的观察如激光干涉太空天线 (LISA) 能够探测这些引力辐射。伴随着引力波天文学的曙光，有关超大质量黑洞 (SBH) 系统演化的研究仍然在进行中。

### 注意事项

1. 所以有关距离数值答案以秒差距 (pc) 表示，而时间间隔以 G 年 (Gy) 表示。我们以太阳质量 ( $M_S$ ) 作为参考质量。你可能需要以下数值：

$$1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m},$$

$$M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$t_H = 13.7 \text{ Gy}, \text{ 宇宙年龄}, 13.7 \times 10^9 \text{ 年},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2,$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

2. 当你见到“**估算 (estimate)**”这个词语时，你的答案不需要有准确值，但与真值的差异少于 10 倍。相反，当你见到“**求出 (find)**”这个词语时，你必须给予准确结果。“**计算 (calculate)**”这个词语表示你的答案必须以数值表示。

3. 在整个问题中，均假设星系中每颗恒星的质量等于太阳质量  $m = M_S$ 。

4. 在整个问题中，除了引力波，我们不考虑广义相对论的影响。所有恒星及黑洞均以牛顿万有引力定律中的质点处理。



## Part A. 动力学摩擦 (1.6 分)

在这部分，我们将研究星系的简化模型。你可以忽略星系中恒星的速度及假设有恒定的恒星数密度  $n$ 。星系的特征大小是  $R$ 。由于数密度足够小，故恒星的碰撞非常罕见，可以忽略不计。我们先考虑一个超大质量黑洞 (SBH)，其质量  $M \gg m$ ，并以速度  $v$  在星系中运动。令人惊讶的是，该黑洞 (SBH) 受到来自恒星的平均作用力并非等于零。这个力减慢了 SBH 的运动，因此称为动力学摩擦力。这部分将致力于研究这个力。

- A.1** 我们以 SBH 为参考系，分析一个恒星以瞄准距离 (impact parameter)  $b$  经过的过程 (图 1)。假设 0.75pt

$$b \gg b_1 = \frac{GM}{v^2}. \quad (1)$$

恒星的偏转角  $\alpha = kb_1/b$ ， $k$  为系数。准确计算  $k$  的数值。如若你未能准确计算  $k$ ，在余下部分假设  $k = 1$ 。

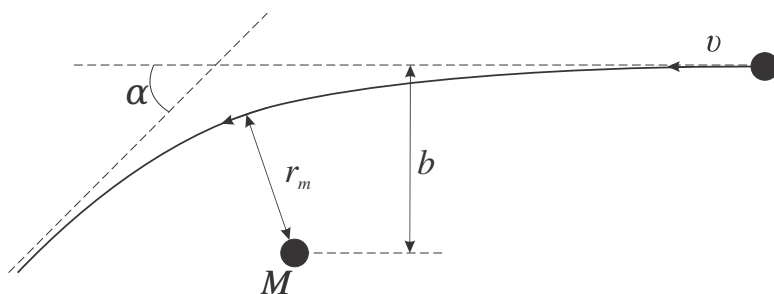


图 1: 一颗恒星在一个质量为  $M$  的 SBH 作用下发生偏转。瞄准距离 (impact parameter) 是  $b$ ，恒星和物体之间的最短距离是  $r_m$ 。

- A.2** 沿 SBH 的速度方向建立  $Ox$  轴。求出从恒星转移到 SBH 的动量分量  $\Delta p_x$ 。 0.25pt

- A.3** 估算 SBH 受到的平均作用力  $F_{DF}$ ，按瞄准距离  $b$  来求平均。忽略  $b < b_1$  的那些恒星的贡献。假设 SBH 处于星系的中心。用  $M, v, R, G$  和星体密度  $\rho = mn$  来表示  $F_{DF}$ 。 0.4pt

- A.4** 如你在之前任务中得到的一样， $F_{DF}$  的表达式包含因子  $\log R/b_1$ ，此后我们将此记为  $\log \Lambda$ 。当  $M = 10^8 M_S, R = 20 \text{ kpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$ ，速度  $v = 200 \text{ km/s}$  时，计算  $\log \Lambda$ 。 0.2pt



## Part B. 引力弹弓 (3.0 分)

在这一部分中，我们考虑一个位于星系中心的系统，该系统由两个具有相同质量  $M \gg m$  的超大质量黑洞 (SBH) 所组成，我们称之为**超大质量双黑洞系统 (SBH binary)**。我们假定这个超大质量双黑洞系统附近没有其它恒星。每一个超大质量黑洞在另一个超大质量黑洞的引力场中都有一个半径为  $a$  的圆形轨道。

**B.1** 求出每个超大质量黑洞的轨道速度  $v_{bin}$ 。求出超大质量双黑洞系统的总能量  $E$ ，用  $a, G$  和  $M$  来表达。 0.25pt

在与该系统距离远大于  $a$  的位置有很多恒星。在整个星系的引力场作用下恒星沿着不同的复杂的轨道运动。恒星的运动可看作是混沌的，就像理想气体中分子的运动一样。我们假定恒星运动速度相同，且大小  $\sigma \ll v_{bin}$ ，平均质量密度记为  $\rho$ 。在这种情况下，动力学摩擦不再影响超大质量双黑洞系统，能量损失由其它因素造成。

**B.2** 让我们来解决一个与此有关的问题。让一个质量为  $m$  的恒星经过一个位置不动、质量为  $M_2 \gg m$  的质点附近。在运动过程中恒星和质点之间的最小距离记为  $r_m$ 。恒星在较大距离时的速度记为  $\sigma$ 。求出瞄准距离  $b$  的准确值。 0.5pt

若一颗恒星趋近一个超大质量双黑洞系统至约  $a$  的距离，则会和双星发生复杂的三体相互作用，其结果几乎总是射出一个速度约为  $v_{bin}$  的恒星（这里的速度是相互作用后在一个很远距离处的速度）。我们将这种强的相互作用称为一颗恒星与一个超大质量双黑洞系统的碰撞。碰撞后的恒星的加速和出射被称为“**引力弹弓 (gravitational slingshot)**”

**B.3** 估算超大质量双黑洞系统和恒星两次连续碰撞之间的特征时间间隔  $\Delta t$ 。请注意  $\sigma \ll v_{bin}$ 。 1.0pt

**B.4** 估算超大质量双黑洞系统的能量损失率  $dE/dt$ 。估算半径的变化率  $da/dt$ 。用参量  $a, \rho, \sigma, G$  表示结果。 0.25pt

**B.5** 让我们指定系统初始半径为  $a_1$ 。估算由于“引力弹弓”效应，半径减小一半所用的时间  $T_{SS}$ 。当  $\sigma = 200 \text{ km/s}$ ,  $a_1 = 1 \text{ pc}$ ,  $\rho = 10^4 M_S/\text{pc}^3$  时，计算  $T_{SS}$ 。 1.0pt



### Part C. 引力波辐射 (1 分)

在这部份我们将研究一个与其他恒星没有任何相互作用，且拥有两个相同质量黑洞的超大质量双黑洞系统 (SBH Binary)。此系统中，能量的流失是由于引力波对外的辐射。其能量的流失率是：

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1024}{5} \frac{G}{c^5} (\omega^3 I)^2, \quad (2)$$

其中  $\omega$  是超大质量双黑洞系统的角速度和  $I = 2Ma^2$  是系统的四极矩。

<b>C.1</b> 求出因辐射引力波而导致的超大质量双黑洞系统的半径随时间的变化率 $da/dt$ .	0.2pt
--	-------

当该超大质量双黑洞系统的轨道半径  $a$  接近于其内黑洞的引力半径时：

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

两个超大质量黑洞便会即时进行合并。

<b>C.2</b> 假设该系统的初始半径 $a_2 \gg r_g$ ，请估算该系统因辐射引力波而导致半径收缩至 $r_g$ 所需的时间 $T_{GW}$ 。 $T_{GW}$ 表示成 $a_2, M, c$ 和 $G$ 的函数。	0.7pt
--	-------

<b>C.3</b> 假设超大质量双黑洞系统需宇宙年龄的时间： $T_{GW} = t_H$ 才能进行合并，请计算一个拥有两个质量 $M = 10^8 M_S$ 黑洞的超大质量双黑洞系统的初始半径 $a_H$ 。	0.1pt
--	-------



### Part D. 整个演化的过程 (4.4 分)

在这部分，我们将利用以上各部分获得的结果，并考虑天体物理的真实情况。考虑两个中心各有一个质量  $M = 10^8 M_\odot$  的 SBH 的星系合并成一个新星系。合并后的新星系呈球状对称且半径为  $R = 20 \text{ kpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$ 。假设这个星系的密度随至星系中心距离  $r$  的变化为

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{4\pi G r^2}, \quad (4)$$

其中  $\sigma = 200 \text{ km s}^{-1}$ 。

- D.1** 若有一物体在该星系的引力作用下在半径  $a < R$  的圆形轨道上运动。在不用考虑动力学摩擦的情况下，求出该物体的速度  $v$ 。 0.25pt

当两个星系刚合并成一个新星系后，其中的两个超大质量黑洞可在该星系内任意位置，并互不影响。我们将考虑其中一个超大质量黑洞。假设它绕星系中心作半径  $a < R$  的圆周运动，并且由于动力学摩擦缓慢损失能量。

- D.2** 请估算轨道半径随时间的改变率  $da/dt$ 。在 Part A，我们忽略了星系中恒星的速度，现实情况下星系内各恒星速度不为零，也不都有相同速度  $\sigma$ ，但其量级与  $\sigma$  相同，而 SBH 相对其它恒星的运动速度也为同一量级，所以你仍然能够使用 A.3 获得的公式来作估算。你需要用到公式 (4) 中的  $\rho(r)$ ，并假设  $\log \Lambda$  是 A.4 中计算得到的常数。 0.75pt

经过一定时间后，两个超大质量黑洞将接近星系的中心。假设这两个超大质量黑洞在星系的引力下均绕星系中心作半径为  $a$  的圆周运动。

- D.3** 估算这两个超大质量黑洞到达其间相互引力不能被忽视时的临界半径  $a_1$ ，并计算出数值。当到达这个临界半径时，便认为超大质量双黑洞系统已形成 (图 2)。 0.3pt

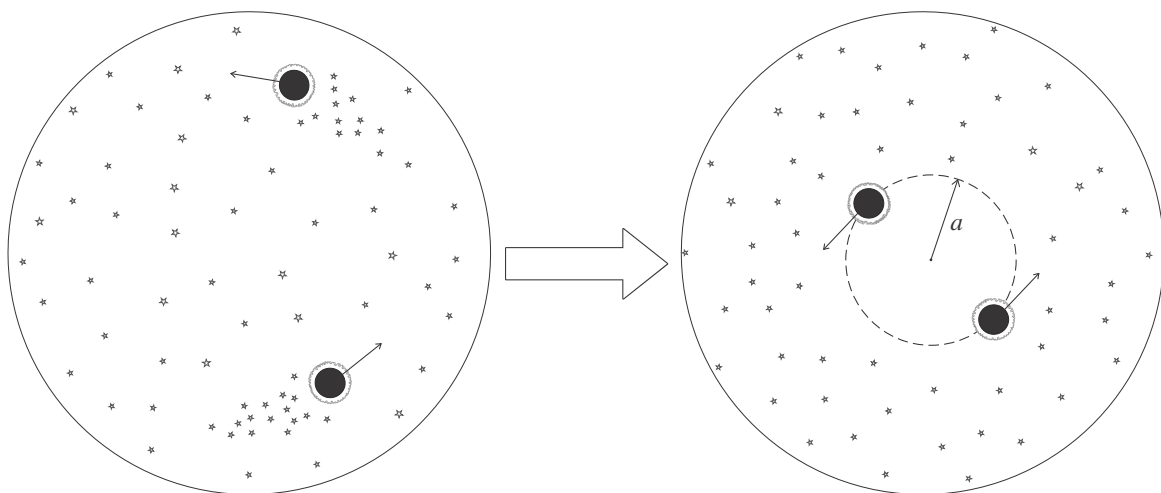


图 2: 超大质量双黑洞系统形成前后的演化。

- D.4** 我们假设，两个超大质量黑洞星系在距星系中心距离为  $a_0 = 2 \text{ kpc} = 2 \times 10^3 \text{ pc}$  处合并之后，计算由于动力学摩擦，两个超大质量黑洞形成双星所需要的时间  $T_1$ 。 0.75pt



形成双星之后，两个超大质量黑洞从星系的中心射出其所有恒星，并独自留在原处。由于这时的动力学摩擦变得无效，超大质量黑洞由于弹弓效应开始失去能量。你可以假设恒星绕双星运动的速度是  $\sigma$ ，根据公式 (4)，星体密度为  $\rho_1 = \rho(a_1)$ 。弹弓效应迅速减少体系的半径，经过一段时间之后，体系主要由于引力波辐射而开始失去能量。

<b>D.5</b>	当双黑洞的半径 $a < a_2$ 时，引力波辐射导致能量损失。	0.3pt
------------	----------------------------------	-------

<b>D.6</b>	估算双黑洞的半径从 $a_1$ 减小到 $a_2$ （弹弓阶段）所需要的时间 $T_2$ 。估算双黑洞的半径从 $a_2$ 减小到几乎为 0（引力波辐射阶段）所需要的时间 $T_3$ 。	1.75pt
------------	---	--------

<b>D.7</b>	用上述给的参数，计算两个超大质量黑洞从星系合并到超大质量黑洞合并之间演化所需要的时间 $T_{ev}$ 。	0.3pt
------------	---	-------

**历史评述。**长期以来，天体物理学家一直认为超大质量双黑洞在弹弓阶段就停止了演化，这是由于双黑洞将碰撞距离较小的、有可能和双黑洞发生碰撞的所有恒星全部射出。这似乎意味着两个超大质量黑洞绝不会发生合并。这个事实被称为**最后的秒差距问题**。

真实的星系具有复杂的非对称性。几年前，人们发现，在复杂形状的星系中，碰撞距离较小的恒星不断被发现。超大质量双黑洞持续失去能量，但比我们这里估计的要慢。最终秒差距问题被成功解决。