

## 暗物质

暗物质存在的第一个证据是Fritz Zwicky通过观测Coma星系团的动力学提供的。Coma星系团是一个包含约一千个星系的星系团。Zwicky利用维里定理(Virial theorem)估计了星系团的质量。作为维里定理的一个简单例子，考虑太阳和行星组成的系统，行星绕太阳做圆周运动。维里定理在这个系统中体现为行星动能和引力势能之间的精确关系。更一般地，如果一个系统中，很多粒子被相互作用约束在一起，那么维里定理是系统总动能的时间平均与系统总势能的时间平均之间的关系。

在1933年，通过观测位于Coma星系团边缘的星系运动速度，Zwicky估计：和光学观测可以看到的质量相比，星系团实际上具有更大的质量。可见物质（星系）之间的引力太小，不足以解释星系之间的高速运动。为了解释星系之间的运动速度，必须引入具有质量的、不可见的物质。这些不可见的物质就是暗物质。

### A. 星系团

考虑一个半径为 $R$ ，总质量为 $M$ 的球状星系团。这个星系团包含 $N$ 个星系（ $N$ 很大），以及暗物质。假设星系和暗物质在星系团中的分布是均匀的。设每个星系的平均质量为 $m$ （包括可见物质和暗物质）。

A.1	假设星系团中的物质是连续分布的。利用 $M$ 和 $R$ 计算星系团的总引力势能。	1.0 pt.
-----	---	---------

由于宇宙膨胀，相对与地球上的观测者而言，所有遥远的天体会向远离我们的方向运动，其运动速度与观测者与天体之间的距离有关。考虑星系团中第 $i$ 个星系（其中 $i = 1, \dots, N$ ）中，一颗IA型超新星发射的光线：设我们观测到该光线的一条拉曼谱线(Lyman, 氢原子发射光谱上的一条谱线)频率为 $f_i$ 。而在地球上，对应的同一条拉曼谱线频率为 $f_0$ 。

A.2	利用 $f_i$ ( $i = 1, \dots, N$ ), $f_0$ 和 $N$ ，求整个星系团远离地球的平均速度 $V_{cr}$ 。注意：星系的运动速度远远小于光速 $c$ 。	0.5 pt.
A.3	假设相对星系团中心而言，每个星系向各个方向运动的概率相同。利用 $N$ , $f_i$ ( $i = 1, \dots, N$ )和 $f_0$ ，求星系相对于星系团中心的方均根速率 $v_{rms}$ 。利用 $v_{rms}$ 和 $m$ ，求星系相对于星系团中心的平均动能。	1.5 pt.

为了求出星系团的总质量，可以用维里定理。该定理说明，对一个由自身保守力约束的多质点系统，有

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

其中 $\langle K \rangle_t$ 是总动能的时间平均值， $\langle U \rangle_t$ 是总势能的时间平均值，而 $\gamma$ 是常数。对一个由自身保守力约束的多质点系统，这个定理可以由以下假设导出，即系统中每个质点的位置和动量大小都是有限的，从而如下定义的量

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

也是有限的.

A.4	长时间来看, $d\Gamma/dt$ 的时间平均值为0, 即 $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$ , 请以此确定引力相互作用情况下, 上述维里定理中的 $\gamma$ . (提示: 试着只对很少的几个星系作 $\Gamma$ 中的求和).	1.7 pt.
A.5	用之前的结果, 确定星系中暗物质的总质量, 用 $N$ 、 $m_g$ 、 $R$ 和 $v_{rms}$ 表示. 其中 $m_g$ 是一个星系的平均可见总质量. 请注意暗物质的方均根速率与星系的方均根速率是相同的.	0.5 pt.

## B. 星系中的暗物质

一个星系中也有暗物质. 考虑一个球状星系, 可见边界半径为  $R_g$  (在此几乎最大的半径内仍然可见大量恒星, 但请注意此半径  $R_g$  之外仍有少量恒星分布). 假设星系内的恒星可以看作是质量为  $m_s$  的质点. 星系中的恒星均匀分布, 数密度为  $n$ , 并且假设都做圆轨道运动.

B.1	设星系中只有恒星, 计算距离星系中心距离为 $r$ 处的一个恒星的速度 $v(r)$ , 并且画出 $v(r)$ 随 $r$ 变化的曲线, 其中距离区间要包含 $r < R_g$ 和 $r \geq R_g$ .	0.8 pt.
-----	--	---------

由观察画出的  $v(r)$  图称为星系旋转曲线(the galaxy rotation curve), 从这个图上能推断出暗物质的存在. 下图显示了一个常见的星系旋转曲线. 为了简化, 假设  $r \leq R_g$  时,  $v(r)$  简化为线性函数,  $r > R_g$  时,  $v(r)$  可以作为常数  $v_0$  处理.

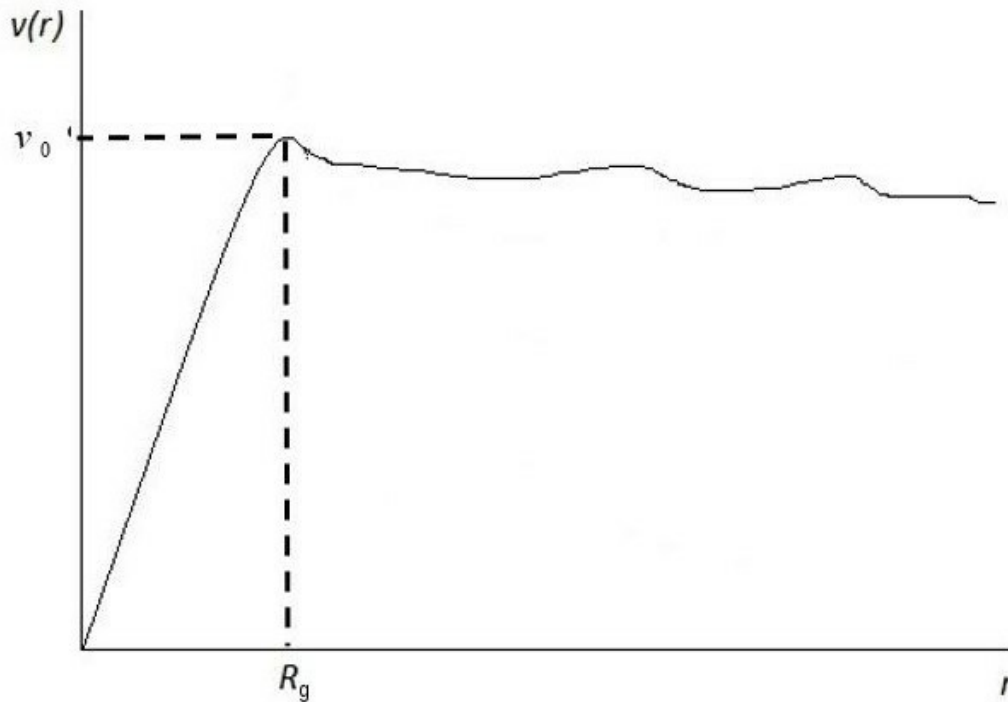


图 1 一个星系的星系旋转曲线.

B.2	用 $v_0$ 和 $R_g$ , 求出落在半径为 $R_g$ 的球形内的星系总质量 $m_R$ .	0.5 pt.
-----	--	---------

B.2 中的图和 B.1 中得到的图不同, 这意味着存在暗物质.

B.3	定出暗物质的质量密度, 将其作为 $r$ 、 $R_g$ 、 $v_0$ 、 $n$ 、和 $m_s$ 的函数, 需考虑 $r < R_g$ 和 $r \geq R_g$ .	1.5 pt.
-----	---	---------

### C. 星际气体和暗物质

现在考虑一个年轻的星系, 其质量主要由星际气体和暗物质构成 (忽略恒星的质量). 星际气体假定由相同的粒子组成, 单个粒子质量为  $m_p$ . 气体的粒子数密度  $n(r)$  和温度  $T(r)$  依赖于星系中心的距离  $r$ . 尽管气体中有很多物理过程发生, 我们可以假定, 由于自身压强和星系万有引力作用, 气体处于流体静力学平衡.

C.1	求解出气体压强梯度 $dP/dr$ , 用 $m'(r)$ , $r$ 和 $n(r)$ 表达. 这里, $m'(r)$ 是以星系中心为球心、半径为 $r$ 的球体内的气体和暗物质的总质量.	0.5 pt.
-----	---	---------

C.2	假定星际气体是理想气体，求解出 $m'(r)$ ，用 $n(r)$ ， $T(r)$ 和它们对 $r$ 的导数来表示。	0.5 pt.
-----	---	---------

接下来为简单起见，假定气体是温度为  $T_0$  的等温分布，星际气体的数密度由下式给出：

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

这里  $\alpha$  和  $\beta$  是常量。

C.3	求解出星系内暗物质的质量密度随 $r$ 的变化。	1.0 pt.
-----	--------------------------	---------