超流体中的涡旋

简介

超流动性是没有摩擦的流动。日常经验告诉我们一种普通流体 (比如室温下的水) 的运动总是伴随着能量的粘性耗散以致于流动逐渐变慢，除非通过外力来保持。与此相反，超流体没有动能损失：一旦被激发，超流体的运动可以无限地继续下去。超流动性最初是在液氦实验中被发现的。

我们在零度下研究超流体氦的特性。这里超流体氦被当作不可压缩的液体，其密度记为 ρ. 流动的连续性（对于一个给定的无限小体积空间，流进和流出的质量是相等的）意味着通过一个封闭表面的氦的速度 $\vec{v}$ 的通量为零。从这一点来说，超流体的速度和磁场强度相似。与磁力线类似，速度与“流线”(”streamlines”) 的切线方向相同，流线密度正比于速度的大小。

真正的超流体有一个重要的性质，无旋性，即超流体的速度沿液氦中任意闭合回路积分结果为零.

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = 0 \tag{1}$$

若沿着一个细“涡旋丝”(”vortex filament”) 不存在超流性，则上述结论需要修改。丝的厚度大约是原子大小，a，但涡旋会在周围的超流体中产生长程速度场：速度绕涡旋丝的环路积分是旋度量子（circulation quantum）[1]

$$\left|\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}\right| = 2\pi\kappa, \tag{2}$$

若速度环路积分的积分路径在不穿过涡旋丝的情况下可以被收缩至一个点，则环路积分等于零 (见图 1)。基于此，我们可以将超流体中涡旋丝产生的速度场和相同形状电流产生的磁场作类比：两个速度分布可以矢量叠加，其结果和对应形状单位电流产生的磁场相同（只差一个带量纲的因子）。

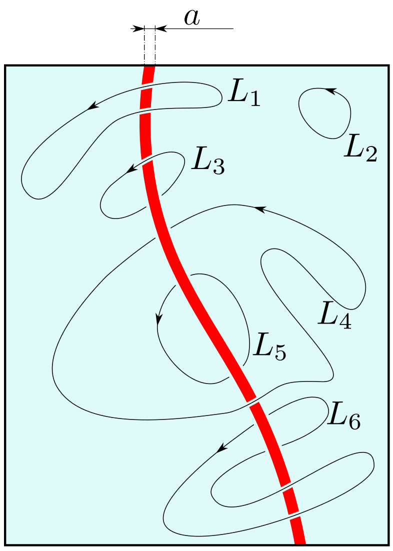

图 1：超流体 (浅蓝色) 中的涡旋丝 (红色)。速度沿路径 L_1, L_2, L_5, 和 L_6 的旋度为零，但沿 L_3 和 L_4 的旋度等于 $\pm 2\pi\kappa$. 注意沿 L_3 和 L_4 的旋度方向相反。

[1]旋度量子化是一种宏观量子效应，对应于玻尔模型中角动量的量子化。旋度量子可以表示成 $\kappa = h/m_{\mathrm{He}}$, 其中 m_{He} 表示氦原子的质量。

Part A 稳态涡旋丝（0.75 分）

考虑一个圆柱形烧杯 (半径 $R_0 \gg a$) 中的超流体氦，及位于其中心的一个竖直的涡旋丝，见图 2.

A.1	画出流线。求出在点 $\vec{r}$ 处速度 v 的表达式。	0.25pt

A.2	推导出涡旋附近自由表面的形状 (表面高度表示成坐标的函数 $z(\vec{r})$). 重力加速度为 g ，忽略表面张力。	0.5pt

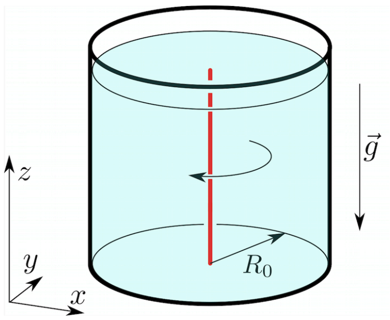

图 2：沿烧杯中心轴线的直涡旋 (straight votex)。

Part B. 涡旋运动（1.4 分）

自由的涡旋会随着流动在空间中运动[2]. 也就是说丝的每一个小单元都随着流体在该单元位置处的速度 $\vec{v}$ 运动。

例如，考虑两个旋转方向相反的直涡旋并排放置，相互间距离为 r_0，见图 3。每个涡旋在另一个涡旋的轴上产生速度 $v_0 = \kappa/r_0$. 因此涡旋对 (vortex pair) 以恒定速度 $v_0 = \kappa/r_0$ 直线运动，并且二者之间的距离保持不变。

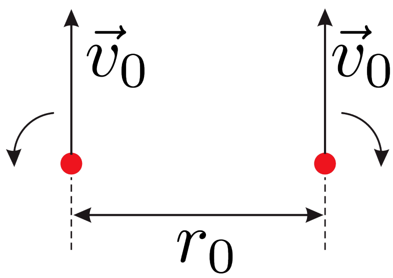

图 3：两个平行放置且旋度相反的涡旋丝

B.1	考虑两个相同的直涡旋并排放置，相互距离为 r_0 ，如图 4 所示。求出涡旋初始速度的表达式，并且画出它们的轨迹图 (trajectories) 。	0.25pt

[2]这是动量守恒的结果，见下一节。

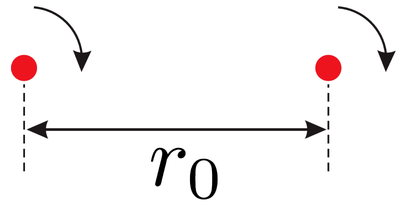

图 4：两个平行放置且旋度相同的涡旋丝

圆柱形烧杯中的氦 (见 Part A) 充满了三角形状栅格 ($u \ll R_0$) 分布的相同竖直涡旋，见图 5。

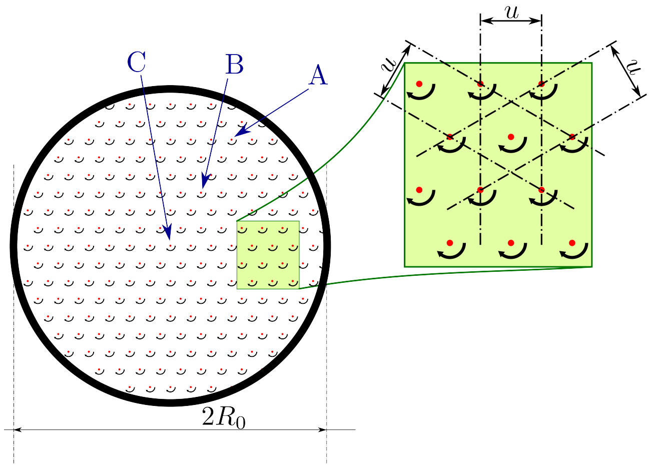

图 5：烧杯中的三角形状栅格分布的涡旋。此为俯视图。

B.2	画出涡旋 A, B 和 C (位于中心) 的轨迹。	0.15pt

B.3	推导出位于位置 $\vec{r}$ 处的一个涡旋的速度 $v(\vec{r})$ 的表达式。	0.4pt

B.4	推导给出涡旋 A 和 B 在时间 t 时的距离 AB(t). 把 AB(0) 当作已知。	0.35pt

B.5	推导给出平滑 (忽略栅格结构) 的自由氦表面形状 (free helium surface shape) $z(\vec{r})$.	0.25pt

Part C. 动量和能量（1.75 分）

涡旋系统的能量主要来自于长程速度场的贡献。这种速度场对丝的具体结构不敏感。丝本身不能用宏观理论来合理描述，并且这些明显的奇异位置 (无穷大) 无重要意义。绕着涡旋丝、半径为 a 的细管内的实际物理量，比如能量，应该被忽略。细管外超流动能密度 $\rho v^2/2$ (这里 $\rho =$ const) 和磁场能量密度 $B^2/(2\mu_0)$ 相似——它们都是各自变量的二次函数。这种相似性及电流产生的磁场和涡旋（与电流形状相同）产生的速度场之间的类比，有助于我们计算一个给定系统的能流。例如，给定一圆形线圈的电感 $L \approx \mu_0 R \log(R/a)$ ，其中 R 是线圈半径，a

是电线的半径。我们得到超流体涡旋环路的能量[3]

$$U \approx 2R\rho\pi^2\kappa^2 \log(R/a) \tag{3}$$

总的流体动量同样取决于长程速度分布，并可以通过对动量密度 $\rho\vec{v}$ 作积分得到。同样，考虑一个由位于 xy 平面的圆形涡旋回路产生的流动。很明显，基于对称性考虑，总的动量只有 z 分量：

$$P = \int \rho v_z dV = \rho \int\int \underbrace{\left(\int v_z dz\right)}_{q(x,y)} dxdy \tag{4}$$

最里面的积分事实上是沿某些平行于 z 轴的路径的积分, 见图 6. 从旋度恒等式 (公式 2) 可知

$$q(x,y) = \int\limits_{L(x,y)} \vec{v}\cdot d\vec{l} \tag{5}$$

是分段常数。当路径从圆环外面穿过，上式为 0；当路径从圆环里面穿过，上式为 $2\pi\kappa$. 总的动量因此可表示为

$$P = \rho\cdot\pi R^2\cdot 2\pi\kappa = 2\pi^2\rho R^2\kappa \tag{6}$$

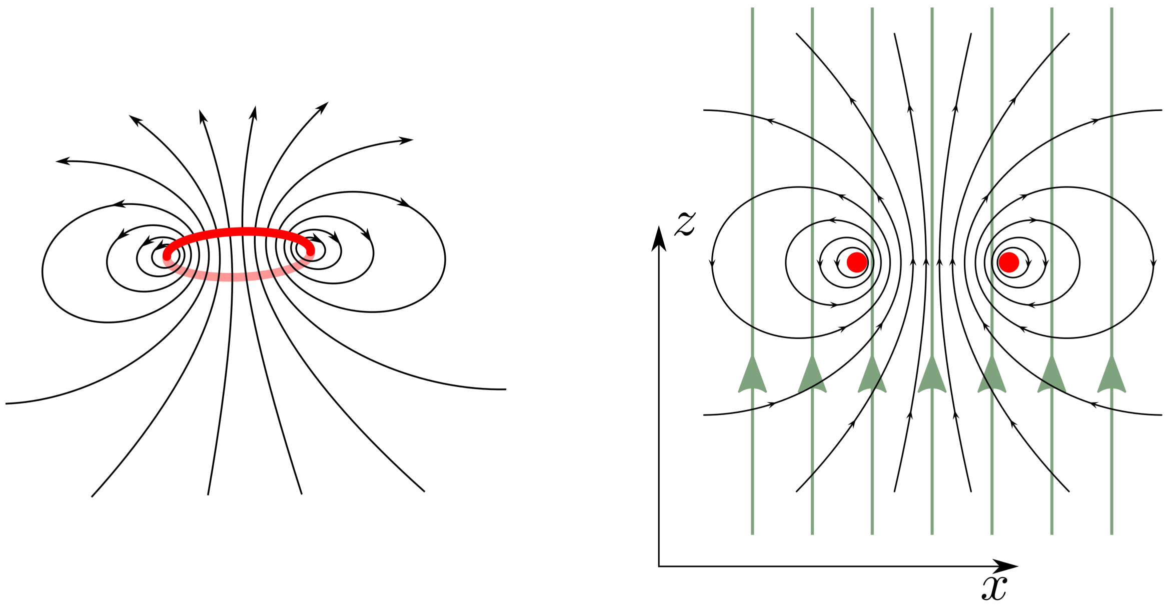

图 6：圆形涡旋环路的速度场和用于计算 $q(x,y)$ 的积分路径 (绿色)

[3] 仅当 $\log R/a \gg 1$ ，这种表达有效。

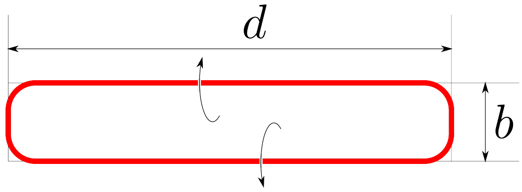

图 7：一个近似为矩形的涡旋环路，$b \ll d$

C.1	考虑一个近似为矩形的涡旋线圈 $b \times d, b \ll d$, 见图 7. 标出其动量 $\vec{P}$ 的方向。推导出动量大小的表达式。	0.3pt

C.2	计算其能量 U.	0.7pt

C.3	假设我们在 x 方向上平移一个长直涡旋丝，平移距离为 b , 见图 8. 流体动量改变多少？标出动量改变方向。丝的长度 (受容器壁的限制) 是 d .	0.75pt

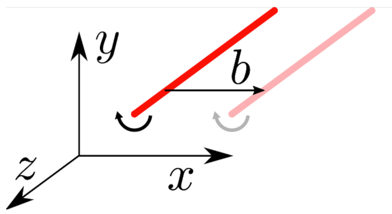

图 8：当涡旋相对于流体平移时会有动量改变

Part D. 被捕获的电荷（2.85 分）

如果把电子注入氦中，电子会被涡旋丝捕获。这里和下面的部分中，忽略氦的极化率 ($\epsilon = 1$).

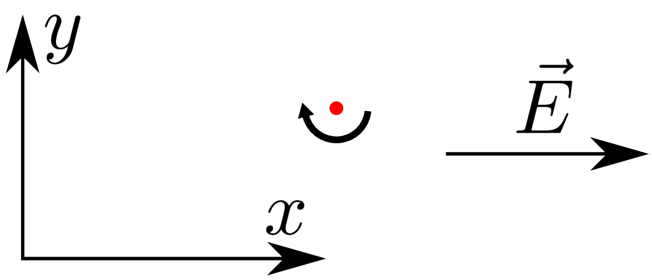

图 9：均匀电场中的直涡旋

D.1	考虑均匀电场 $\vec{E}$ 中具有均匀线电荷密度 $\lambda < 0$ 的直涡旋。画出涡旋轨迹图。推导给出其速度随时间的变化。	0.5pt

在一个均匀电场 $\vec{E}$ 中放置一个半径为 R_0 ，具有均匀线电荷密度 $\lambda < 0$ 的圆形涡旋环路，电场方向垂直于环路所在的平面，并与环路动量 $\vec{P}_0$ 方向相反。

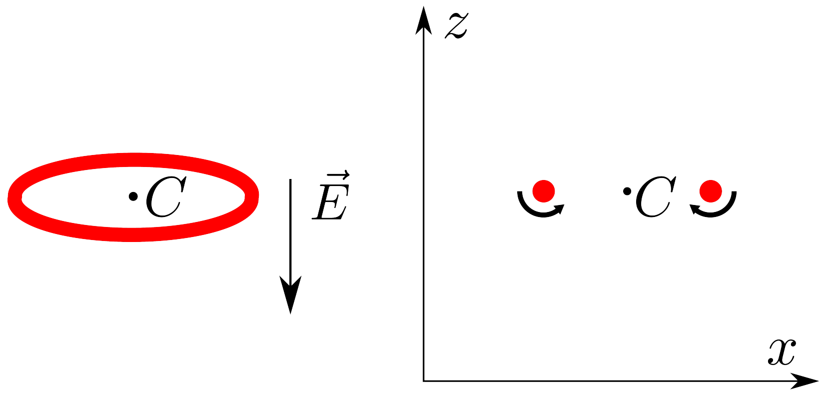

图 10：（左）均匀电场中的涡旋环。（右）环的截面。

D.2	画出环中心 C 的轨迹。求出环半径随时间的变化函数。	0.6pt

D.3	推导给出其速度 $v(t)$ 随时间的变化。	1.5pt

D.4	在时刻 t^* 撤去电场，此时速度为 $v^* = v(t^*)$. 推导给出在时刻 $t > t^*$ 时环的速度 $v(t)$.	0.25pt

Part E. 边界的影响（3.25 分）

固体器壁会改变涡旋丝的速度场，这是因为流体不能从器壁中流过。在数学上，这要求在器壁表面，垂直于器壁表面的速度分量为零。

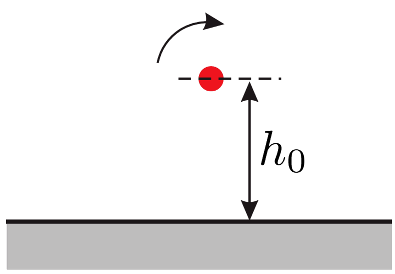

图 11：一个平面器壁附近的直涡旋丝。

E.1	初始时，一个直涡旋丝与平面器壁相距 h_0，画出其后涡旋丝的运动轨迹，求出速度作为时间的函数。	0.5pt

考虑一个放置于直角器壁附近的直涡旋丝，其至两壁距离都为 h_0.

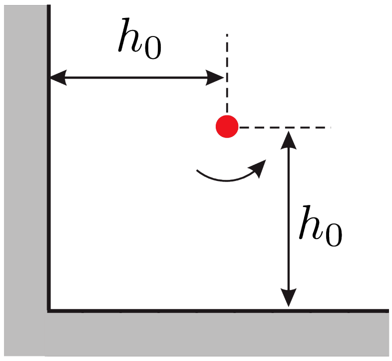

图 12：放置在直角器壁附近的直涡旋丝。

E.2	涡旋的初始速度 v_0 是多少?	0.75pt

E.3	画出涡旋的运动轨迹。	0.5pt

E.4	经过很长时间后，涡旋的速度 v_∞ 是多少?	1.5pt