

用平行偶极线磁势阱进行地震和火山监测

A. 简介

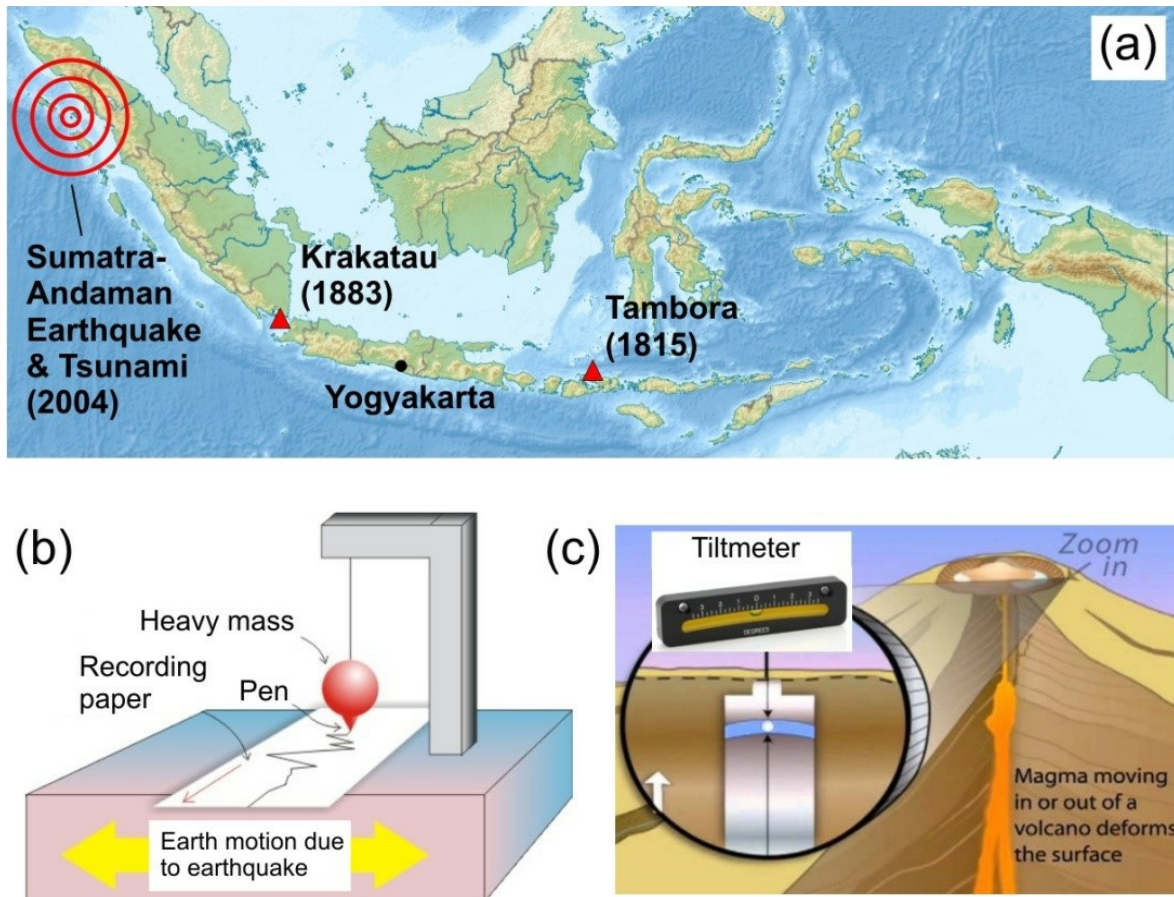


图1 (a) 印度尼西亚地图，图中标出了印尼几次大灾难。(b) 探测地震的地震仪。(c) 用于监测火山的地动仪（测量地面倾斜度）。

印度尼西亚是世界上最大的群岛，它有17,000个岛屿分布在热带地区，由此它常被称为“赤道的珍珠”。不幸的是，印尼有大量的自然灾害，例如地震和火山喷发。像sumatra-Andaman地震和Tsunami（2004年）、Krakatau（1883年）以及Tambora（1815年）火山喷发都是人类历史记录中的巨大的灾难事件。为了探测地震，我们地震仪，它是一个摆动装置为基础的系统，通过测量地面的位移和加速度来监测地震（图1b）。为了监测火山，我们用地动仪来测量地面倾斜度的变化，这种变化是地下岩浆的移动引起的（图1c）。在本题中，我们将根据物理学原理，用一种新的磁陷阱和监测方法，即所谓的平行偶极线（PDL）势阱系统，监测地震和火山。

平行磁偶极线系统是两个磁偶极的线性分布（也称为磁偶极线）的一种排列，如图2所示。近来，两位印尼物理学家发现了这一系统的有趣现象：如果上述偶极线的长度超过某一特定的临界长度，磁场在边缘上变得更强，这将产生一个“骆驼峰形状势”（简称驼峰势），如图2a所示。这一驼峰效应很重要，它使我们可以用这一系统作为

Experiment

E2

People's Republic of China

新型的磁势阱，即平行偶极线（PDL）势阱。实验上，我们可以用一对直径磁铁，即沿直径方向磁化的圆柱体型磁铁，其磁北极和南极在曲面上，而不是在柱体的平面上，如图2c。

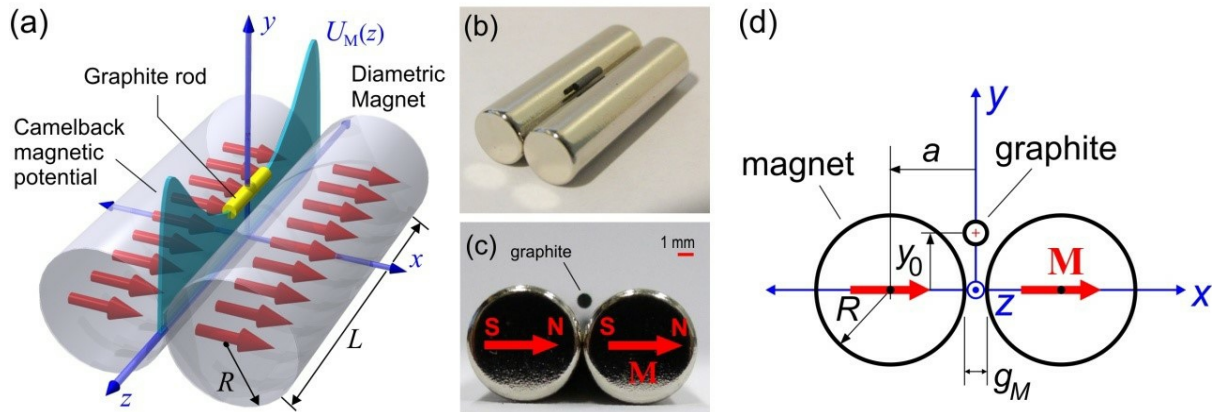


图2 (a) 平行偶极线势阱模型，其中，驼峰势沿z-轴方向。(b) 包含两个“直径”磁铁的装置。(c) “(b)”的截面图。(d) PDL势阱的示意图。

如果我们放置一个石墨棒（普通铅笔的芯）进入势阱，棒将浮起，或者被捕获且保持在稳定状态。这是由于：在x-方向，石墨被两边的磁铁排斥，在竖直（y）方向，磁铁排斥力与重力平衡，使石墨漂浮在高度 y_0 （图2d）。在纵向(z)，驼峰势使石墨稳定。

磁势阱的驼峰势起到了一维谐振子的作用。如果你沿z-轴方向给石墨棒一个微微扰，棒将表现出欠阻尼振动，如图3a。这一PDL势阱可以被用做灵敏的地震仪。如果地下发生振动，石墨棒倾向保持稳定，其相对位移（图3b）是“地震”的信号。与此相似，它也可以用作灵敏的地动仪。如果你使势阱略微倾斜，石墨棒将在没有任何摩擦的情况下发生明显移动。

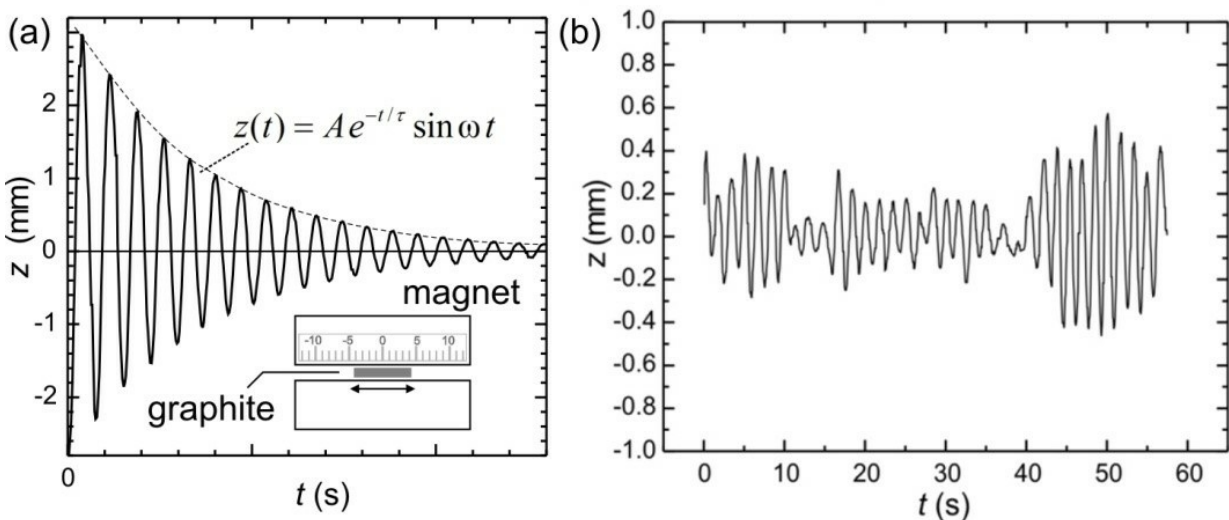


图3. (a) 石墨棒沿驼峰势方向的欠阻尼振动。(b) 地震仪的应用：通过PDL势阱进行地震探测。

在以下两部分，我们将研究PDL势阱的物理机制及其应用。

Section A: 若干基本特点

- (1) 确定磁铁的磁化强度 M (2.5分)。
- (2) 磁漂浮和磁极化率 χ (1.0分)。
- (3) 驼峰势振动和磁极化率 χ (1.0分)。
- (4) 振子的品质因数 Q ，以及确定空气的线性 μ_A (3.0分)。

Section B: 若干应用

- (5) PDL势阱地震仪 (0.5分)。
- (6) PDL势阱地动仪 (2.0分)。

B. 仪器装置

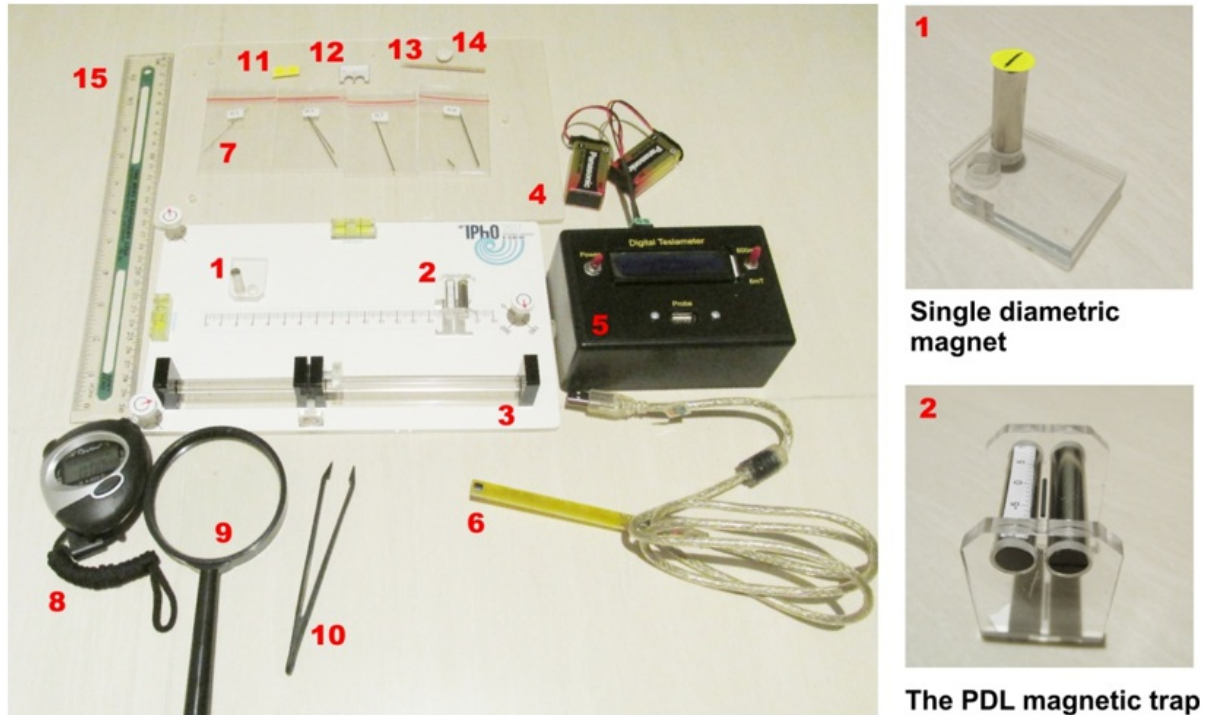


图 4. 实验装置图。（Single diametric magnet：单个直径方向磁铁；The PDL magnetic trap：PDL磁势阱）

1. 单个直径方向磁铁装置。黄色标签用来标记磁化方向。
2. PDL磁势阱的装置，图中表示出石墨的漂浮。
3. 带有3个螺丝的顶部平台。
4. 底部平台。
5. 测量磁场的特斯拉计。提供的电池为特斯拉计供电，并连有一个霍尔探头。
6. 特斯拉计的霍尔探头元件。
7. 4种直径尺寸的石墨棒（铅笔的铅芯）：HB/0.3, HB/0.5, HB/0.7,和HB/0.9。关于精确的直径，参见所给的常数和数据。为了得到题目所要求的特定长度的石墨棒，你可能需要折断它们。
8. 秒表
9. 放大镜
10. 镊子（抗静电干扰的）

Experiment

E2

People's Republic of China

11. 黄色圆贴片— 用来画单个磁铁的磁化方向的标记(北极, 南极)
12. "插入尺"用来量石墨棒悬浮高度
13. 牙签, 用来移动石墨棒
14. 橡皮泥, 用来将磁铁装置粘在平台上
15. 尺子

说明和警告:

1. 保持单个磁铁远离PDL势阱(双磁铁)装置, 否则他们会撞到一起并折断!
2. 特斯拉计不用时要关闭, 以节省电源!
3. 请将装置7, 11-14小心的从底部平台(装置4)上取下, 并将顶部平台(装置3)放在底部平台上.
4. 你可以用三个螺丝来调节顶部平台的水平.

常数和数据表:

直径方向磁铁的半径	:	$R = 3.2 \text{ mm}$
直径方向磁铁的长度	:	$L = 25.4 \text{ mm}$
PDL势阱的缝隙宽度	:	$g_M = 1.5 \text{ mm}$
石墨的质量密度	:	$\rho = 1680 \text{ kg/m}^3$
石墨棒 "HB/0.3" 直径	:	$d = 0.38 \text{ mm}$
石墨棒 "HB/0.5" 直径	:	$d = 0.56 \text{ mm}$
石墨棒 "HB/0.7" 直径	:	$d = 0.70 \text{ mm}$
石墨棒 "HB/0.9" 直径	:	$d = 0.90 \text{ mm}$
室温	:	$T = 298 \text{ K}$
真空磁导率	:	$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
玻尔兹曼常数	:	$k_B = 1.38064852 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
重力加速度	:	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$

C. 实验和问题

SECTION A. PDL势阱的基本特性

[1] 定出磁铁的磁化强度 (M) (2.5 pt.)

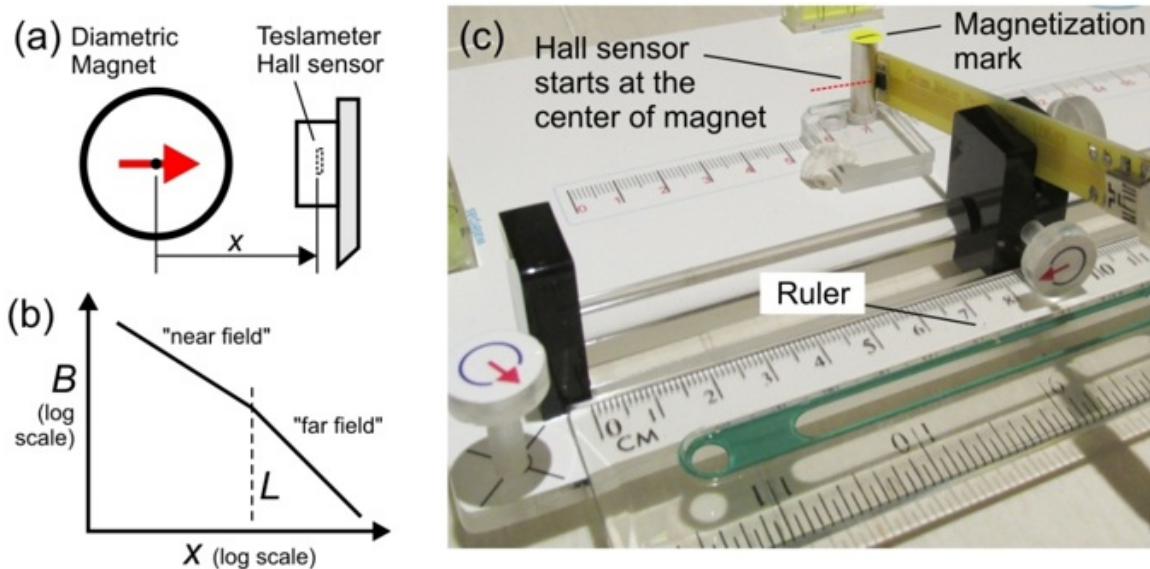


Figure 5. (a) 测量磁场. (b) 磁感应强度随位置的变化曲线（对数坐标） (c) 装置图. (Diametric Magnet : 直径方向磁铁; Teslameter : 特斯拉计; Hall sensor : 霍尔传感器; Hall sensor starts at the center of magnet : 霍尔传感器初始位于磁铁中心位置; Magnetization mark : 磁化方向标记; Ruler : 尺子)

磁势阱的捕获能力取决于磁铁总的磁偶极矩 m 。它依赖于磁化强度 M ，磁化强度是指单位体积内的磁偶极矩，是磁性材料的一个特性。对于这里的柱状磁铁：

$$M = \frac{m}{\pi R^2 L} \quad (1)$$

R 是半径， L 是磁铁长度（见常数和数据表部分）。 M 对于本实验中所有磁铁来说都是相同的。我们将研究磁场的分布并得到在我们这个PDL势阱中使用的直径方向磁铁的磁化强度 M 。

使用单个直径方向磁铁装置，并如图5c所示组装实验仪器。如图6a所示，使磁化方向对准霍尔（磁场）传感器。使用特斯拉计测量磁场强度在 x 的分布。磁场强度 B 在近场或 $x \leq 16$ mm 范围内的“偶极子线”：

$$B_I(x) = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3 L} \quad (2)$$

x 轴沿直径方向磁铁的磁化方向，如图6a所示。 x 是指直径方向磁铁中心和传感器芯片里面的霍尔传感器探头之间的距离。 x 的初始读数请参考图6b所示。

Experiment

People's Republic of China

E2

我们只在“近场”区域内做测量：

A.1	在附近没有任何磁铁的情况下，记录特斯拉计的零点值(B_0)。之后测量的结果应该减去上述零点值。	0.1 pt.
A.2	在近场区域($7 \leq x \leq 16$ mm)内测量磁场 B 随 x 的变化情况，这里 x 是指测量点离开磁铁中心的距离。在答题纸上记录并画出 (record and plot) 你的结果。注意遵从下面的“提示和指南”部分内容。	1.15 pt.
A.3	利用你的实验数据定出幂指数 p 的值。	0.75 pt.
A.4	定出磁铁的磁化强度 M 的值。	0.5 pt.

提示和指南：

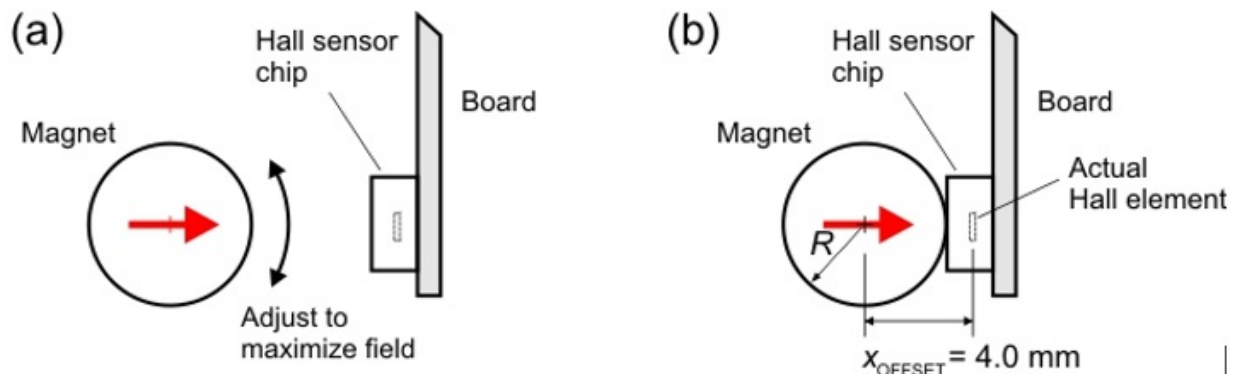


图6. 磁场测量。(a) 调节。(b) 偏移问题。Magnet: 磁铁 Hall sensor chip: 霍尔探测芯片

Adjust to maximize field: 调至最大磁场 Hall sensor chip: 霍尔感应片 Board: 平板

Offset: 偏移 Actual Hall element: 真实的霍尔元件

1. 当不用时，关闭特斯拉计，以减少电池消耗!
2. 对特斯拉计，在读每一个数之前，等大约2秒。
3. 注意： x 是从磁铁的中点到测量点的距离。磁铁的半径是 $R = 3.2$ mm.
4. 用图5c推荐的测量步骤。
5. 参见图6a，转动磁铁，使其磁化指向霍尔元件，这将导致磁场最大。你可以用黄色的圆贴片标记磁铁的磁化方向。
6. 当霍尔元件接触到磁铁时，磁铁中心点到实际霍尔元件之间的实际距离是所给的如下偏移值： $x_{\text{OFFSET}} = 4$ mm

7. 在霍尔元件位于 $x = 5 \text{ mm}$! 时开始你的测量! 当霍尔元件接触到磁铁时 ($x = 4 \text{ mm}$) , 所得的数据应该被丢掉, 这是由于霍尔元件已饱和。

[2] 磁悬浮效应和磁极化率(χ) (1 pt.)

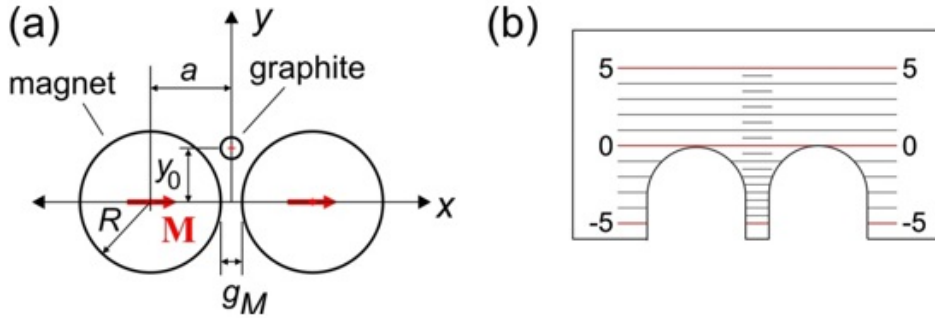


图7 (a) 势阱中的磁悬浮效应。 (b) 插入尺, 测量悬浮高度 y_0 。

PDL势阱可以实现磁悬浮。如图7a所示, 石墨棒悬浮在势阱中心, 高度为 y_0 。石墨棒受到磁场的排斥力 $F_M(y_0)$ 。这个排斥力依赖于磁极化率 χ 和石墨棒的位置 y_0 。磁极化率描述了一个物质如何在外场的作用下被磁化, 并满足关系 $\mu = (1 + \chi)\mu_0$ 。其中, μ 为物质的磁导率。在PDL势阱中, 石墨棒受磁场的斥力为:

$$F_M(y_0) = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_r}{2} \frac{R^4}{a^5} f\left(\frac{y_0}{a}\right) \quad (3)$$

注意上式中有个负号并且当 $F_M(y_0)$ 为正时代表力的方向向上。这里 V_r 是石墨棒的体积, M 是磁铁的体磁化强度 (从问题1中得到), 磁铁中心的位置为 $a = R + g_M/2$ (见图7a), 其中 $g_M = 1.5 \text{ mm}$ 是两个磁铁间的缝隙)。 $f(u)$ 是一个无量纲常数:

$$f(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5} \quad (4)$$

A.5	将长度为8 mm的HB/0.5石墨棒轻轻地投放到势阱中。测量石墨棒的磁悬浮高度 y_0 (见图7a)。提示: 如图7b所示, 用插入尺进行测量。在读取石墨棒位置时, 将尺压在磁铁上。	0.1 pt.
A.6	利用A.5中的结果定出石墨棒的磁极化率 χ	0.8 pt.

Experiment

People's Republic of China

E2

A.7	石墨棒是什么样的磁性材料？从下列选择一种：(i)铁磁；(ii)顺磁；(iii)抗磁	0.1 pt.
------------	---	---------

[3] 驼峰势中的振动和磁极化率 (χ) (1 pts)

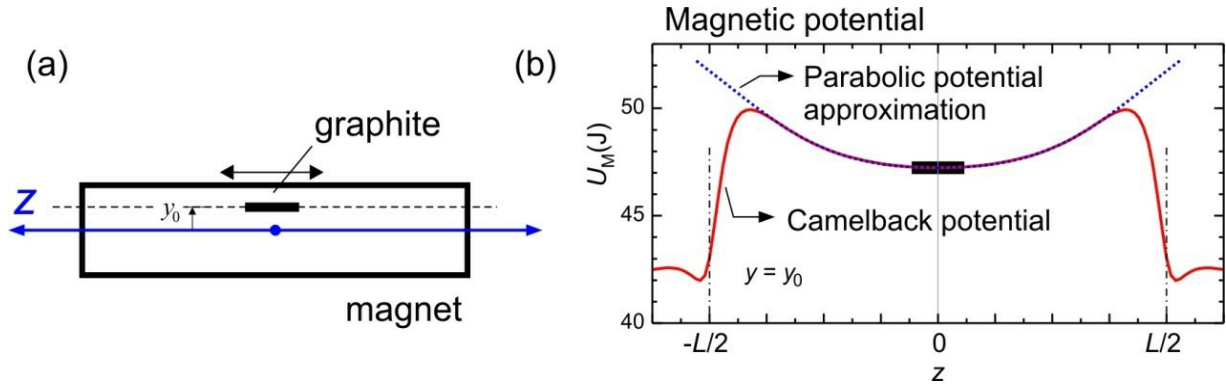


图8 (a) 石墨棒在高度 y_0 处的振动 (b) PDL陷阱中的驼峰势和其抛物线近似

如图8所示，利用在PDL陷阱的磁场驼背势中的振动，我们可以单独地 (independently) 定出磁极化率 χ 。对小振幅 ($z < 4$ mm)，磁场势能可以由以下抛物线近似给出 (如图8b中的虚线所示)：

$$U_M = \frac{1}{2} k_z z^2 \quad (5)$$

其中 k_z 是势能的“弹性系数”， z 是石墨棒质心的位移。弹性系数 k_z 依赖于磁化强度 M (从问题1中得到) 和磁极化率 χ ：

$$k_z = -C_1 \mu_0 \chi M^2 V_r \quad (6)$$

其中 μ_0 是真空磁导率， V_r 是石墨棒的体积， $C_1 = 198.6 / \text{m}^2$ 对于这个磁势阱装置是个常数。

把石墨棒投放到磁势阱中心。利用螺母调整平台，使得石墨棒位于势阱中心。用牙签扰动石墨棒，使石墨棒沿驼峰势振动。

A.8	研究 $l=8$ mm 长的 "HB/0.5" 石墨棒的振动。保持较小振幅 ($A < 4$ mm)。测量振动周期 (由于阻尼，振动将随时间衰减，这里暂时忽略阻尼效应)。	0.2 pt.
A.9	利用A.8中的振动计算石墨棒的磁极化率 (χ)	0.8 pt.

[4] 振动的品质因子 Q 和估算空气粘滞系数 (3 pt.)

因为空气阻力，石墨棒的振动会衰减。我们将研究阻力与石墨棒尺寸（直径和长度）的关系，并且估计空气粘滞系数 μ_A 。我们用欠阻尼振子来描述棒的振动： $z(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega t)$ （如图3a所示），其中 A 是初始振幅， $\omega = 2\pi f$ 是角频率， t 是时间。振子的振幅按照 $\exp(-t/\tau)$ 随时间衰减，其中 τ 是阻尼时间常数。根据振子振幅的衰减，可以定义“品质因子” $Q = \omega\tau/2$ 。如果 $Q > 0.5$ ，则该振动是欠阻尼振动； $Q = 0.5$ ，是临界阻尼振动； $Q < 0.5$ ，是过阻尼振动。在利用PDL势阱设计地震仪和地动仪时，这个品质因子非常重要。

我们将圆柱形的石墨棒近似成长的椭球体，来计算阻尼时间常数 τ 和斯托克斯拖曳力。阻尼时间常数由下式给出：

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{\rho r^2}{\mu_A} \ln \left(0.607 \times \frac{l}{r} \right) \quad (7)$$

其中， ρ , r 和 l 是石墨棒的质量密度，半径和长度。 μ_A 是空气的粘滞系数。我们用这个模型估计空气的粘滞系数。

A.10	我们需要确定振动的阻尼时间常数 τ 。图示说明如何用一个简便的方法测量 τ	0.5 pt.
A.11	利用长度为 8 mm，不同直径的石墨棒进行阻尼振动实验。定出每种石墨棒的阻尼时间常数 τ	1.5 pt.
A.12	定出空气的粘滞系数 μ_A 。	1.0 pt.

SECTION B. 传感器应用

[5] PDL 势阱地震仪 (0.5 pt.)

想像如下情况：你用PDL磁势阱来设计地震仪。我们需要非常高的精度，即非常小的加速度“噪声阈值”（地震仪可以检测到的最小的加速度）。这个加速度噪声阈值为（单位： $\text{m}/(\text{s}^2 \text{Hz}^{0.5})$ ）：

$$a_n = \sqrt{\frac{4k_B T \omega}{Q m_R}} \quad (8)$$

其中 k_B 是玻尔兹曼常数， T 是温度（见常数表部分）， m_R 是石墨棒的质量。所有物理量都是国际制单位（SI units）。在问题4中，你已经测量了不同直径石墨棒的 τ 值。选择你认为最适合用作地震仪的那种直径。

B.1	你选择哪种直径的石墨棒？	0.2 pt.

Experiment

E2

People's Republic of China

B.2	对于你选择的石墨棒，计算地震仪的加速度噪声阈值 (a_n)	0.3 pt.
------------	-----------------------------------	---------

[6] PDL势阱地动仪 (2 pt.)

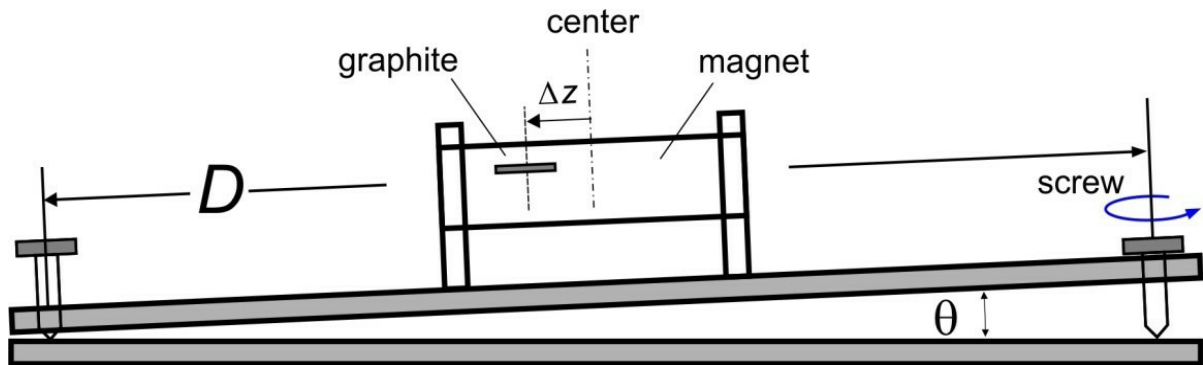


图9 利用PDL势阱制作地动仪

我们将利用PDL势阱制作非常精确的地动仪，以监测火山活动。在本实验中，我们旋转螺钉，以模拟地面倾斜度的变化。我们需要测量螺距 S （螺钉旋转一圈带来的高度变化）。通过测量势阱中石墨棒的偏移，我们将可以非常准确地测量倾斜度。

本实验使用 $l = 8 \text{ mm}$ 长的HB/0.5石墨棒。从中心位置开始。假设驼背势可以近似为问题3中的简谐势能：

B.3	利用螺距 S 和螺钉旋转圈数 (N) 推导偏移量 Δz	0.5 pt.
B.4	缓慢旋转螺钉，确定棒的偏移 Δz 与螺钉旋转圈数 (N) 之间的关系。定出螺距 S	1.25 pt.
B.5	为了读数方便，当地面倾斜度改变时，我们希望石墨棒尽快达到平衡位置（也就是说，需要避免长时间振动）。地动仪理想的 Q 因子 (ideal Q factor) 是哪个？	0.25 pt.