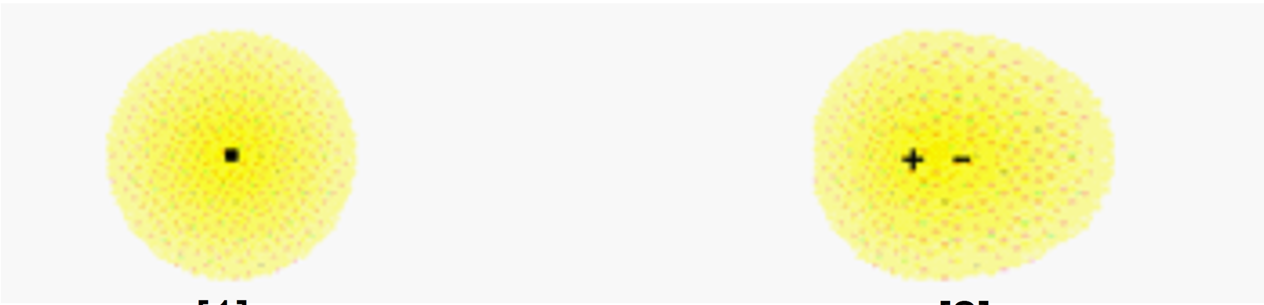
中性原子的光阱（12 point）

光阱是一种多用途的工具，在制备超冷原子系统中扮演了重要的角色，并在技术和量子测量中有重要的应用。通过将激光束照射到一堆中性原子上，我们就能够捕捉并冷却这些原子。当原子被冷却到接近绝对零度时，它们表现出迷人的量子行为，特别是玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 现象。

在本问题中，你将研究用于中性原子的光阱的基本概念，以及钠原子 BEC 实验中的一个特有的现象。

一个中性钠原子可以被描述为一个带正电荷 e 的核被均匀的带负电量 -e 的电子云所包围，正电荷的质量远远大于电子云的质量。在没有外加电场的时候，核和电子云的中心重合；在有激光照射时，激光束的电场与原子的核和电子云都有作用，因此感应产生了电偶极子。反过来，这种感应偶极子又与激光束的电场相互作用，从而产生了偶极子势能，也可说原子感受到光势能。这个势能依赖于光强度的分布 $I(\vec{r})$ 以及所用激光的频率。通过选择合适的激光强度和频率，就可以形成一个类似于囚笼的势阱，以限制住中性原子。

我们首先考虑一个中性原子的极化，该原子被放置在一个匀强外部电场中 $\vec{E}_0 = E_0\hat{u}$，$\hat{u}$ 是一个单位矢量，E_0 是场大小。中性原子被感应出的偶极矩 $\vec{p}_0 = e\ell\hat{u} = \alpha E_0\hat{u}$。这里 ℓ 是负电荷和正电荷中心之间的距离，α 叫做极化率。



[1] [2]

图 1. 电子云的分布。[1] 电子云围绕原子核的球形分布；[2] 在电场中电子云的偏移（原子中正电中心 + 和负电中心 -分开）。

1 (1.5 point)

最初没有外场，然后外场的大小非常缓慢地从零逐渐增到 E_0 ，因此在第 1 小问中电场可看成不随时间变化。外场的瞬时值表示为 $\vec{E} = E\hat{u}$,

1.1	计算原子从外场中吸收的瞬时功率，用 $\vec{E}$ 和 $\dot{\vec{p}}$ 表示，$\dot{\vec{p}}$ 是感应偶极矩随时间的变化率。	0.75pt
1.2	计算当外电场从 0 增加到 $E = E_0$ 时，外场对原子所做的总功，并由此推导出感应偶极子的势能 $U_{induced}$ ，用 $\vec{E}_o$ 和 $\vec{p}_o$ 表示。	0.75pt

注意，当外部电场被关闭时，由于惯性和库仑恢复力，电子云以固有频率 ω_0 振荡。

2 (1.0 point)

在接下来的研究中，我们将研究中性原子放置在一个外加的随时间和空间变化的激光场中，激光的电场为 $\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{u}.E_0(\vec{r})\cos\omega t$ 。感应偶极矩 $\vec{p}$ 将随着驱动激光场的频率 ω 振荡。众所周知，振荡的偶极子本身会发射

电磁辐射。由于发射辐射，电子会受到一些反冲动量使得偶极子与电场间有摩擦，导致偶极子的相位与所加电场有相位差。因此，感应偶极矩的形式为 $\vec{p}(\vec{r},t) = \hat{u}E_0(\vec{r})\alpha(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$。在这里，极化率 α 和相位差 φ，都依赖于驱动频率 ω。由于振荡，我们所讨论的所有物理量用平均值表示，平均时间为激光场的周期 $2\pi/\omega$，对周期性变化的量，它的时间平均值定义为 $\langle f(t)\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} f(t)\,dt$。今后，符号 $\langle...\rangle$ 表示尖括号中的物理量的时间平均值。

激光强度 $I(\vec{r})$ 与激光场的振幅 E_0 的关系为：$I(\vec{r})= \frac{\varepsilon_0 c E_0^2(\vec{r})}{2}$，其中 ϵ_0 为真空中介电常数，c 为光速。

2.1	推导出感应偶极子势能 $U_{dip}(\vec{r}) = \langle U_{induced}(\vec{r},t)\rangle$ 的表达式，用 α, φ, ε_0, c, 和 $I(\vec{r})$ 表示。	1.0pt

3 (1.0 point)

通过感应偶极子势能，可以将中性原子捕捉到阱中，此外，由于原子还吸收和发射光，所以振荡的电场也会产生作用于原子的散射力。光散射过程可能导致加热或原子从光阱中流失，可用散射率来表征。散射率就是在单位时间内被一个原子散射的光子数，定义式为：$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{\langle P_{abs}(\vec{r})\rangle}{\hbar\omega}$。这里，$\langle P_{abs}(\vec{r})\rangle$ 是原子从激光场中吸收的平均功率值，$\hbar\omega$ 是光子的能量 $(\hbar = h/2\pi)$。

3.1	求出散射率 $\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 的表达式，用 α, φ, ε_0, c, $I(\vec{r})$, $\hbar$ 和 ω 表示。	1.0pt

4 (2.0 point)

U_{dip} 和 $\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 都依赖于极化率 α，为了计算极化率 α, 我们采用在外电场 $\vec{E}(t)$ =$\hat{u}E_0\cos\omega t$ 作用下的一维振子模型。Ox 是和单位向量 $\hat{u}$ 平行的轴。在这个模型中，电子的运动由三种力决定:

i) 恢复力 $-m_e\omega_0^2 x\cdot\hat{u}$，它描述了以固有频率 ω_0 振荡的自由振子，该频率也对应原子在光场中的跃迁频率。我们用 x 表示负电荷中心相对于正电荷中心的位移，正电荷假设是静止的。

ii) 激光场的驱动力: $-eE_0 cos\omega t.\hat{u}$

iii) 阻尼力 $-m_e\gamma_\omega\dot{x}.\hat{u}$，这是由加速电荷的辐射而产生的，$\gamma_\omega$ 是一个与频率相关的阻尼率。

综上，电子的运动方程为：$\ddot{x}+\gamma_\omega\dot{x}+\omega_0^2 x = \frac{-eE_0\cos\omega t}{m_e}$。该方程的解为 $x = x_0\cos(\omega t+\varphi)$。这里 x_0 和 φ 为待确定量。

4.1	推导出极化率 α 的表达式，用 γ_ω, e, m_e, ω_0 和 ω 表示。	2.0pt

5 (1.0 point)

实际上，阻尼率 γ_ω 与电子轨道无关。因此，我们可采用另一种简单的模型，即在没有激光场的情况下，电子进行圆周运动，其频率为 ω，速度为 v。在加速时，电子辐射出的电磁波的功率遵循 Larmour 公式：$P_L = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2a^2}{c^3}$，$a$ 代表加速度。阻尼力与阻尼率 γ_ω 的关系为：$F_d = -m_e\gamma_\omega v$。我们还假设电子的总能量比每个周期辐射出的能量大。

5.1	求出能量阻尼率 γ_ω 的表达式，用 e, ϵ_0, c, m_e 和 ω 表示。	1.0pt

6 (0.5 point)

当驱动频率 ω 接近固有频率 ω_0 时，极化率变大，导致偶极子的势能有更大的值，散射率也增大。因此，通过考

虑比率 $U_{dip}(\vec{r})/\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r})$，可以找到合适的激光频率来降低散射率，同时保持相当深的囚禁势。

6.1	在 $\omega=\omega_0$ 时，阻尼率为 $\gamma\equiv\gamma_{\omega_0}$, 求出此时的 $U_{dip}(\vec{r})/\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r})$，用 ω,ω_0,γ 表示。	0.5pt

7 (1.5 points)

从上述结果中可以看到：通过选择高激光强度，且激光频率 ω 不太接近于原子的光跃迁频率 ω_0, 我们可以同时实现一个深的囚禁势阱和低的加热速率。因为散射率 $\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 是正的，从上面得到的比率 $U_{dip}(\vec{r})/\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r})$ 可以看出，如果 $\omega<\omega_0$, 则偶极子的势能是负的，原子会被囚禁在光强最大的激光光束的聚焦区域。一旦原子落入陷阱，通过减少阱深来去除高能原子，可以将囚禁的原子气体冷却到超低温，从而形成 BEC。BEC 研究中的一个突破进展是在 90 年代末用 $^{23}\mathrm{Na}$ 原子所取得的 (D. M. Stamper-Kurn et al., Phys.Rev.Lett. 80, 2027 (1998))。

BEC 中的物理可以理解如下。在自然界中有两种粒子: 具有整数自旋的玻色子和半整数自旋的费米子。两个相同的费米子不能存在于同一个量子态。相比之下, 多个玻色子占用一个量子态是允许的: 在超低温度下，玻色子中的一大部分可以凝聚到一个最低的能量态，形成凝聚云 (凝聚的玻色子)；而其余的玻色子处于较高能量的激发态 (非凝聚或热玻色子)。让我们来分析一个实际的例子: 钠原子的稀薄气体，钠原子是玻色子，被囚禁在由高斯激光束形成的光阱中 (图 2a)。激光波长为 λ，其对应的频率为 ω ($\omega<\omega_0$)。光束沿 z 轴传播，强度分布为：$I(\rho,z)=\frac{2P}{\pi D(z)^2}\exp\left(-\frac{2\rho^2}{D(z)^2}\right)$, 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，腰宽为 $D(z)=D_0\sqrt{1+z^2/z_R^2}$，$z_R=\pi D_0^2/\lambda$ 称为 Rayleigh 长度。激光总功率 P 和束腰参数 D_0 将决定囚禁光势阱的各参数，其中一个参数就是势阱深度 U_{depth}，它是势能极小值的绝对值，势能零点在无穷远处 (图 2b)。

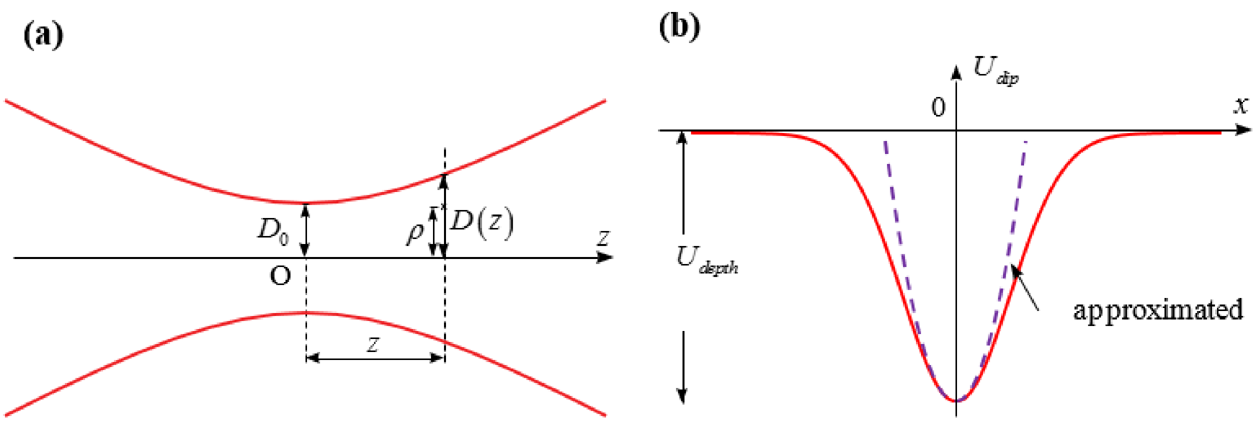


Figure 2. (a) 高斯光束。包络线表示在 $z=const$ （const 的意思是“常数”）的固定平面上的腰宽 $D(z)$。(采自维基百科);(b)$\omega<\omega_0$ 的高斯光束产生的光阱，沿 x 方向的示意图。虚线是谐振子势，它是对光阱底部附近的势能的近似。图中 approximated 的意思为“近似的”。

7.1	求出势阱深度 U_{depth} 的表达式，用 $c,\omega,\omega_0,\gamma,P,D_0$ 表示。	0.5pt

7.2	给定激光功率 $P=4$ mW, 激光波长 $\lambda=985$ nm, $D_0=6\,\mu$m, 和钠原子固有的波长 $\lambda_0=589$ nm。计算势阱深度 U_{depth}, 并将你的结果表达成等效的温度 T_0, 在这一等效温度下，未被囚禁的原子热能等于势阱深度。	1.0pt

8 (0.5 point)

当原子云的温度 T 比等效温度 T_0 小得多时，其光阱势能可以很好地近似为一个柱对称的谐振子势 $U_{dip}(\rho,z) = -U_{depth} + \frac{1}{2}m\Omega_\rho^2\rho^2 + \frac{1}{2}m\Omega_z^2z^2$, 其中 m 为钠原子的质量，$\Omega_\rho$, Ω_z 是在相应方向上的振动频率。

8.1	求出 Ω_ρ, Ω_z 的表达式，用 T_0, m, D_0, z_R 和 k_B 表示。这里 k_B 是玻尔兹曼常量。	0.5pt

回想一下，在超低温度下，钠原子云由凝聚原子和热原子组成。凝聚玻色子的行为遵从不确定性原理，根据不确定性原理可以估算云的空间大小或动量分布。另一方面，热玻色子是由经典物理学描述的，特别是它们服从麦克斯韦－玻尔兹曼分布定律。我们来估算凝聚云的大小，即凝聚钠原子到陷阱中心的平均距离。当原子在这个云里运动时，每个凝聚原子都有势能和动能。势能是关于凝聚云的尺度的单调递增函数，原子试图降低势能以达到最低能级；另一方面，随着云尺寸的减小，根据不确定性原理，粒子动量必须增加，从而导致动能增加。这样，通过平衡这两种相反趋势的能量，由原子组成的凝聚云最终会达到一个最佳尺度。

9 (1.0 point)

简单起见，让我们考虑一个最简单的一维陷阱 $U(z) = const + \frac{1}{2}m\Omega_z^2z^2$。

9.1	估算凝聚云的大小 z_0，用 m, $\hbar$, Ω_z 表示。	0.5pt
9.2	推导出最低能级 E_0 的表达式，用 $\hbar$ 和 Ω_z 表示。	0.25pt
9.3	计算粒子的平均速度 ν_0，用 m, $\hbar$, Ω_z 表示。	0.25pt

接下来，我们将研究如何通过开关势阱来区分凝聚云和热原子云。这需要记录云的密度的形状图像。

热气体将显示各向同性的麦克斯韦速度分布，即使势阱是各向异性的。相反地，BEC 的速度分布是各向异性的。更准确地说，沿强约束的轴，BEC 的膨胀速度要快于弱约束的轴，因此，膨胀主要发生在径向方向，最初雪茄形状的凝聚体变成了薄饼形状，如图 3 所示。因此，在长时间飞行后的密度分布将会是各向异性的，并与囚禁在陷阱中时云的形状相反。

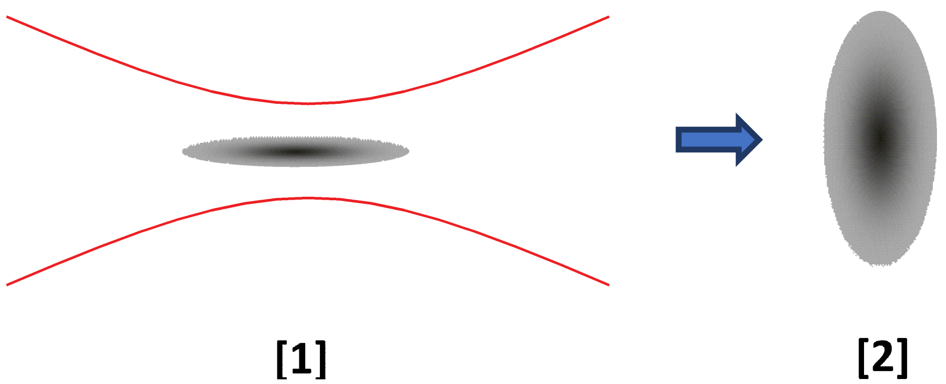


图 3. 云的形状。[1] 在关闭陷阱前；[2] 陷阱关闭很长时间后。

10 (2 point)

现在我们将之前的结果扩展到三维势，即高斯激光束中的光阱。

10.1	求出高宽比 $\frac{z_0}{\rho_0}$，其中 z_0 和 ρ_0 是凝聚云的初始大小，用 Ω_ρ, Ω_z 表示。	0.5pt

10.2	当光阱关闭后，凝聚云会沿不同的方向以不同的初始速度 ν_ρ 和 ν_z 膨胀。计算出比值 $\frac{\nu_\rho}{\nu_z}$，用 Ω_ρ, Ω_z. 表示。	0.5pt

10.3	假设凝聚云在膨胀过程中速度保持不变，经过长时间膨胀以后，云的大小比初始时的大得多，即 $z_L \gg z_0$ 和 $\rho_L \gg \rho_0$.，计算此时凝聚云的比率 $\frac{z_L}{\rho_L}$。	0.5pt

10.4	与问题 10.3 相同，经历长时间之后，热原子云的大小比初始时的大得多，即 $z_{T,L} \gg z_0$ 和 $\rho_{T,L} \gg \rho_0$. 时，计算热原子云的高宽比 $\frac{z_{T,L}}{\rho_{T,L}}$。	0.5pt