

太空碎片

简介

在半个多世纪的太空探索中，很多人造物体聚集在地球附近。这些没有特定的目的的物体称为太空碎片。人们通常最关注其中较大的物体，例如那些不能正常工作的卫星和用过的多级火箭最后两级（upper stage），它们在完成其使命后继续处在轨道上。这些较大的太空垃圾彼此碰撞，从而产生成千的碎片，这些碎片使所有目前运行的空间飞行器面临危险。

众所周知的一个假想图像如下：某些太空垃圾相碰可能会产生连锁效应，每一个碰撞导致的新碰撞将产生更多的新碎片，这又增加了新碰撞的可能性。这样的链式反应导致我们失去所有地球附近的人造卫星，使新的空间项目无法进行，这一现象被称为**基斯勒综合症（Kessler syndrome）**。

为了防止上述不希望的结果发生，人们计划组建一个特别行动队，把大的太空垃圾从其现在的轨道拖到地球的大气层或拖到死亡轨道（graveyard orbits）。为此，一个特制的太空装置，即太空拖车将用来俘获太空垃圾。在俘获那些失控的物体之前，我们需要理解其转动动力学机制。

我们建议你参与这一行动的计划，并发现太空垃圾的转动动力学如何在不同因素的影响下发生变化。

火箭残骸（rockets stage）的描述

我们这里考虑的火箭残骸是一个“科博丁 42 号”（Kerbodyne 42）火箭的最后一级残骸，如图 1。图中的圆标出了球形燃料箱的边界。

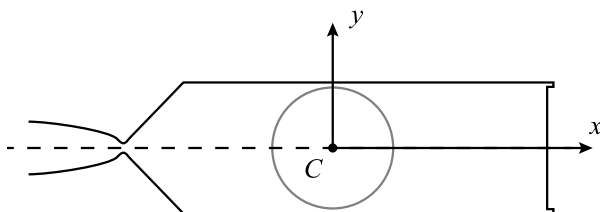


图 1：“科博丁 42 号”（Kerbodyne 42）残骸（upper stage）

我们引入一个随体坐标系 Cxy ，坐标原点在质心 C ， x 是残骸的对称轴， y 垂直于 x 。绕 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为 J_x 和 J_y ($J_x < J_y$)。

Part A. 转动 (3.8 分).

考虑残骸的任意一个初始转动，其相应的角动量为 L (图 2)，图中的 θ 为对称轴和角动量之间的夹角。假定此时的燃料箱是空的。且没有任何力和力矩作用在残骸上。

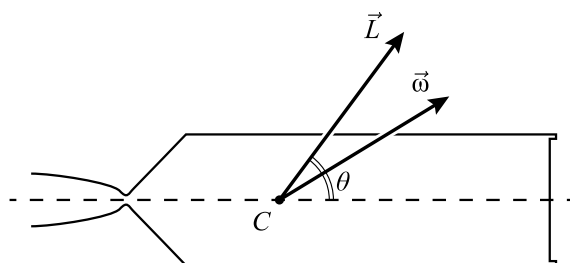


图 2: 残骸的转动

A.1 分别求角速度 $\vec{\omega}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影。已知 $\vec{L} = J_x \omega_x \vec{e}_x + J_y \omega_y \vec{e}_y$, 这里, x 为物 0.2pt
体的对称轴, x 和 y 轴上的单位矢量分别为 \vec{e}_x 和 \vec{e}_y .

A.2 分别求和转动 ω_x 和 ω_y 相联系的转动能量 E_x 和 E_y . 求残骸的总转动动能 $E =$ 0.4pt
 $E_x + E_y$, 表示为角动量 L 和 $\cos \theta$ 的函数。

在 Part A 的剩余部分中, 考虑残骸以初始角动量 L 和 $\theta(0) = \theta_0$ 自由转动。

A.3 用 x_0 表示残骸的对称轴 Cx 初始时相对于惯性参考系的取向。通过守恒定律求角 ψ 1.2pt
的最大值。 ψ 为残骸的对称轴 Cx 在自由转动过程中和 x_0 之间的夹角。
注意: 由于没有任何外力矩作用在残骸上, 角动量矢量为常量。

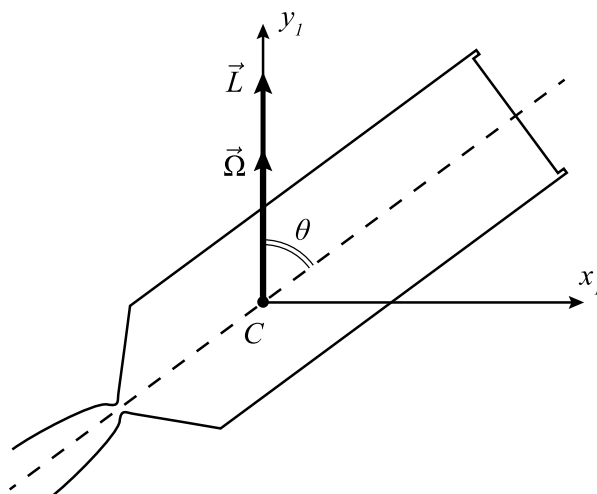


图 3: 进动

引入参考系 $Cx_1y_1z_1$, 其中 y_1 沿恒定角动量 \vec{L} 方向 (图 3). 上述参考系绕 y_1 转动, 使残骸对称轴始终位于 Cx_1y_1 平面。



- A.4** 对给定的 $L, \theta(0) = \theta_0$, 和转动惯量 J_x, J_y , 求参考系 Cx_1y_1 绕 y_1 转动的角速度 $\Omega(t)$ 2.0pt
 ; 求残骸相对于参考系 Cx_1y_1 转动角速度 $\vec{\omega}_s(t)$ 的方向和绝对值, 直接表示为时间的函数; $\vec{\omega}_s(t)$ 的方向表示成它与对称轴 Cx 的夹角 $\gamma_s(t)$. 注意: 角速度矢量可以相加, 即 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_s$.

Part B. 暂态过程 (Transient Process, 1.2 分).

大多数火箭在上升阶段提供动力, 当被发射物体和残骸 (火箭) 分离后, 在残骸的燃料箱里还有剩余燃料。假如剩余燃料的质量 m 与残骸的质量 M 相比可以忽略。燃料箱里的液体燃料晃动及其粘滞摩擦力将导致能量损失, 经过一个非常规的动力学暂态过程后, 能量到达极小。

- B.1** 对任意的初始值 L 和 $\theta(0) = \theta_1 \in (0, \pi/2)$, 经过一个暂态过程后, 角度 θ 变为 θ_2 , 求 0.6pt
 θ_2 .

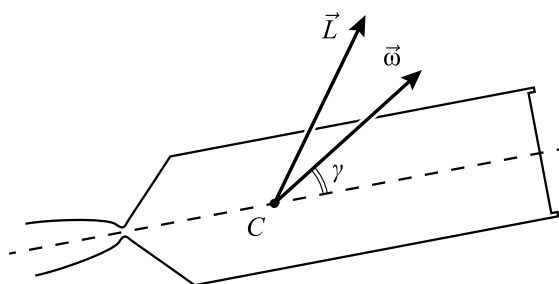


图: 残骸角速度 and 对称轴之间的角度

- B.2** 给定初始角速度 $\omega(0) = \omega_1 = 1 \text{ rad/s}$, 角速度方向与残骸对称轴的夹角 $\gamma(0) = \gamma_1 = 30^\circ$, 以及 $J_x = 4200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $J_y = 15\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 计算暂态过程后角速度 ω 的值 ω_2 . 0.6pt

Part C. 磁场 (5 分).

地球磁场是影响地球轨道上火箭残骸转动动力学的另一个重要因素。让我们先考虑一个辅助问题。

涡流 (Eddy Currents) 引起的力矩

将一个厚度为 D 、半径为 R 的薄壁非磁性球壳放入一个均匀磁场 \vec{B} , 该磁场随时间缓慢变化, 其时间导数 $\dot{\vec{B}}$ 为常数矢量, 与磁场 \vec{B} 方向夹角为 α . 壳材料的电阻率为 ρ .

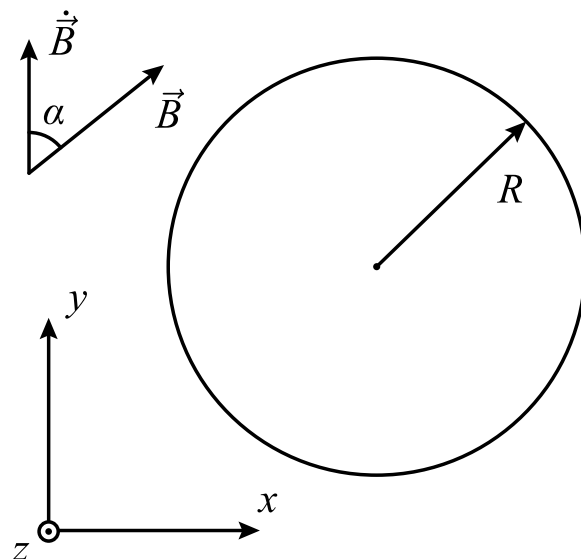


图 4: 磁场中的球形壳

C.1	忽略自感, 求出壳的感应磁矩 $\vec{\mu}_o$. 将磁矩 $\vec{\mu}$ 的答案写成 xyz 分量形式 (参见图 4)	1.0pt
------------	---	-------

C.2	求出球形壳上的力矩 \vec{M} . 将力矩 \vec{M} 的答案写成 xyz 分量形式 (参见图 4) .	0.3pt
------------	--	-------

地球磁场作用下的运动状态演化

现在我们研究火箭残骸 (rocket stage) 转动状态如何改变, 这里假设火箭残骸轨道为圆形极地轨道, 周期为 $T = 100 \text{ min}$ (分钟) (参见图 5)。地磁场与火箭残骸的相互作用特征时间远大于暂态过程 (transient process) 持续时间。我们现在研究的是暂态过程完成之后, 火箭残骸会发生什么。假设开始时火箭残骸绕垂直于轨道平面的转轴转动, 角速度为 ω_2 。

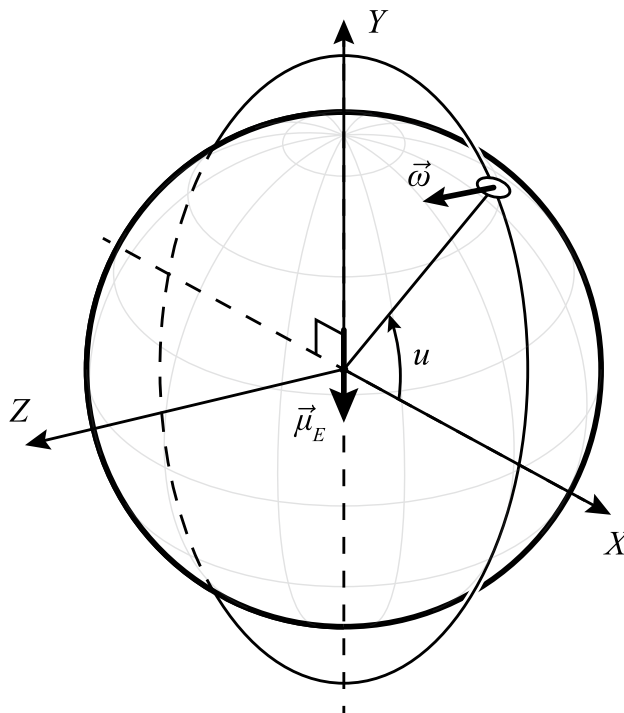


图 5: 轨道

- C.3** 地球磁场 \vec{B}_E 可以模型化为一个位于地球中心的点状磁偶极子产生的磁场。该磁偶极子磁矩 $\vec{\mu}_E$ 沿 Y 轴反方向。残骸轨道与赤道平面 XZ 交点处的地球磁场 B 的绝对值是 $B_0 = 20 \mu T$ (微特斯拉)。求出图 5 所示情况中, 残骸轨道上角度为 u 处的磁场 $\vec{B}_E(u)$ 。轨道运动方向是角度 u 的正方向。将答案写成 $\vec{B}_E(u)$ 在 XYZ 方向上的投影分量形式。
 注意: 将 $\vec{B}_E(u)$ 的各分量表示成 $2u$ 的函数, 而不是 u 的函数, 可能会有助于后继的计算。
 注意: 磁偶极子在 \vec{r} 处的磁场如下

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right). \quad (1)$$

“科博丁 42 号”的残骸大部分用木头制造, 仅有低温燃料箱由导电材料制造。因此, 我们将地磁场对残骸的作用等效于作用在一个壁厚 $D = 2 \text{ mm}$ 、 $R = 4 \text{ m}$ 、电阻率 $\rho = 2.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 的球壳上。

- C.4** 当残骸绕垂直于轨道平面的转轴以角速度 ω 转动, 且角速度方向沿 Z 轴方向时, 求出作用在残骸上的力矩 $\vec{M}(u)$ 。将答案写成 M 在 XYZ 方向上的投影分量形式。 1.3pt
- C.5** 假设残骸的角速度在一个轨道周期内的变化量是可以忽略的小, 求出角速度 $\omega(t)$ 作为时间函数的绝对值。 1.0pt
- C.6** 经过很长时间, 进入稳态运行区时, 求出轨道周期 T 与火箭残骸转动周期 T_s 的比值。 1.0pt