



## 太空电梯 (8.0 points)

有用的数学公式：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

从地球到月球、火星和其他星球进行运输和信息传递，使用火箭是当前技术可以实现的唯一方法。然而，这种太空旅行方式并不那么高效。太空电梯如果能够建成，将为太空旅行提供一种全新的技术（图 1）。这是一个长的结构，它锚定在赤道上，并且达到比地球同步轨道（GEO）更高的高度。地球同步轨道是距地心约 42300 公里的环形轨道，与地球自转具有相同的周期和方向，在该轨道上的物体与旋转的地球相对保持静止。太空电梯这一现代想法最早由 Artsutanov 提出（Artsutanov, Y. 等人, Science, 158, 946, 1967）。然而，直到皮尔逊发表了一篇鼓舞人心的论文“轨道塔：利用地球旋转能量的航天发射器”（Pearson J., Acta Astronautica. 第 2 卷, 第 785 页, 1975 年）之后，这一想法才得到人们的关注。在 Pearson 的论文中，指出了太空电梯的许多有用特征，并且明确指出，为了使太空电梯成为现实，使用比钢强很多但比钢轻得多的材料是十分必要的。由于缺乏这样的材料，多年来这项研究几乎没有进展，直到 20 世纪 90 年代，发现了由六方碳原子阵列组成的新材料碳纳米管。2003 年，“波特”项目（<http://www.port.com/>）启动，建造并运营采用这种技术的太空电梯。

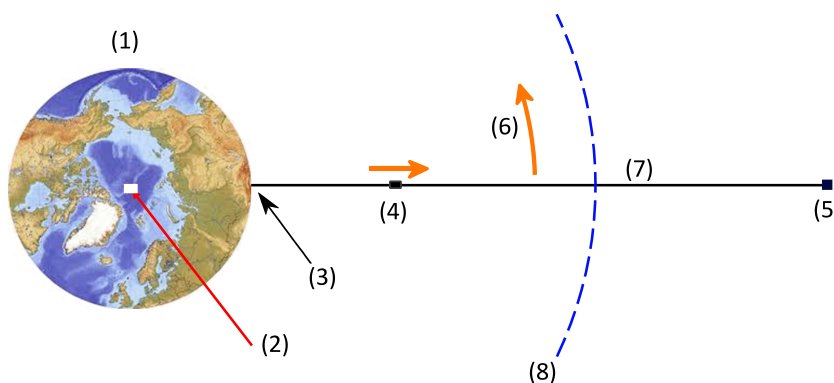


图 1. 太空电梯（改编自维基百科）(1) 地球；(2) 北极；(3) 锚定于赤道；(4) 电梯间；(5) 配重；(6) 与地球一起旋转；(7) 电梯线缆；(8) 地球同步轨道高度。

在这一部分我们将研究太空电梯的两种设计，碳纳米管的力学性能，以及探索太空电梯的一些应用。已知地球质量  $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，地球半径  $R = 6370 \text{ km}$ ，地球同步轨道半径  $R_G = 42300 \text{ km}$ ，太阳质量  $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，地球绕太阳轨道半径  $R_E = 1.5 \times 10^8 \text{ km} = 1 \text{ AU}$ （AU - 天文单位），地球公转轨道速度  $30.9 \text{ km/s}$ ，地球自转角速度  $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。

### 1. 具有均匀横截面的圆柱形太空电梯 (1.5 points)

让我们首先考虑具有均匀横截面  $A$  和均匀密度  $\rho$  的圆柱形太空电梯。它是一个垂直放置在赤道上的圆柱体。它的高度大于地球同步卫星轨道的高度，所以圆柱体底部的压力为零。圆柱体沿其整个长度方向处于拉紧状态，其间拉伸应力（单位面积的力）可自行调整，以便圆柱体的每个单元在重力、离心力和应力的作用下处于平衡状态。

1.1 计算圆柱体上端距地球表面的高度值。

0.5pt

1.2 求出从地球中心到圆柱体内应力最大的点的距离。

0.5pt



- 1.3** 求出圆柱体最大应力的表达式，用  $\rho$ ,  $R_G$ ,  $R$  和重力加速度  $g$  表示。如果圆柱体由密度为  $7900 \text{ kg/m}^3$  的钢制成，抗拉强度为  $5.0 \text{ GPa}$ ，请估算此时所需最大应力与抗拉强度之间的比率。抗拉强度为材料所能承受的最大应力。 0.5pt

## 2. 碳纳米管 (2.5 points)

前一部分的计算表明，为了构建太空电梯，需要具有非常高拉伸强度的轻质材料。碳纳米管恰是满足这种要求的材料，因为碳原子很轻，原子间化学键较强。在自然界中有两种晶体碳结构，金刚石和石墨。在金刚石中，每个碳原子被四个最近邻原子包围，形成四面体。石墨具有片层结构，在每一层中，碳原子排列在一个六边形平面晶格中，被三个最近邻原子包围。尽管金刚石被认为是最坚硬的材料，但六角形石墨层中的碳原子之间的共价键强于金刚石四面体中碳原子之间的共价键。由于不同层的碳原子之间为范德华键，这比共价键弱得多，因而石墨比金刚石柔软得多。

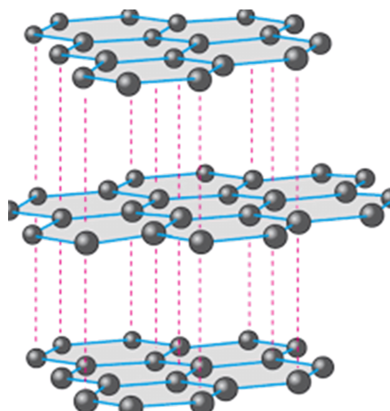


图 2. 石墨结构

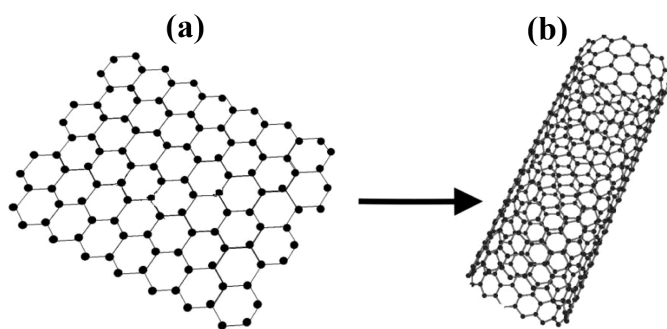


图 3. 石墨烯 (a) 和碳纳米管 (b)



石墨中的单原子层被称为石墨烯，具有单原子厚度。孤立的石墨烯片不稳定并且倾向于卷起以形成球形碳或碳纳米管。石墨烯的六边形晶格如图 4 所示。两个最近邻碳原子之间的距离为  $a = 0.142 \text{ nm}$ ，两个最接近的平行键之间的距离  $b = 0.246 \text{ nm}$ 。由于石墨烯中碳原子之间的共价键很强，碳纳米管的机械性能非常特殊，具有极大的杨氏模量和拉伸强度，以及非常轻的密度。杨氏模量定义为：沿轴向拉伸应力与沿轴向应变（应变为形变长度与原长之比）之比。在应力范围内，应力遵守胡克定律。

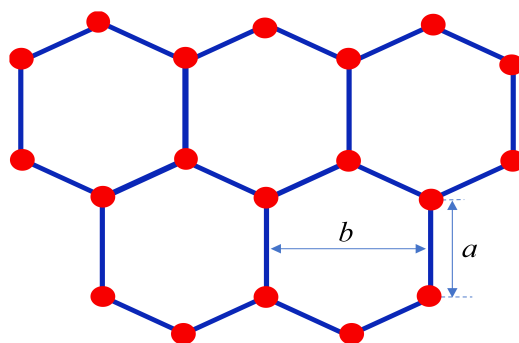


图 4. 石墨烯

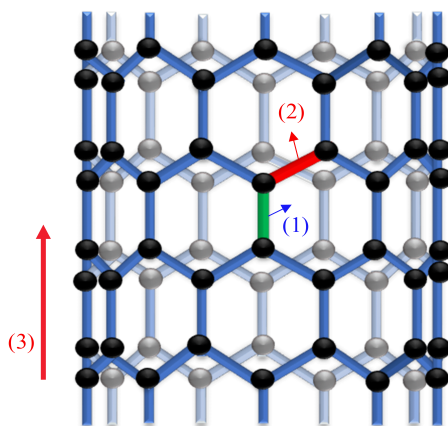


图 5. 具有 9 个碳-碳平行键的碳纳米管。(1) 平行键；(2) 倾斜键；(3) 管轴。

现在我们考查具有 27 个碳-碳平行键（图 5 中给出的是 9 个碳-碳平行键的例子）的碳纳米管的机械性能。两个碳原子之间的键可以用莫尔斯势能  $V(x) = V_0(e^{-4\frac{x}{a}} - 2e^{-2\frac{x}{a}})$  描述。这里  $a = 0.142 \text{ nm}$  是两个最近邻碳原子之间的平衡距离， $V_0 = 4.93 \text{ eV}$  是结合能， $x$  是原子相对于平衡位置的位移。此后，我们用二次多项式  $V(x) = P + Qx^2$  来近似表示莫尔斯势能。忽略所有非临近原子之间的相互作用（包括倾斜键）。在这个近似式中，可以假定碳原子间通过弹性系数为  $k$  的“弹簧”结合。忽略键角的变化。

2.1 求出系数  $P$  和  $Q$  表达式，以  $a$  和  $V_0$  表示。

0.25pt



**2.2** 计算弹簧弹性系数  $k$  的值。 0.25pt

**2.3** 计算碳纳米管的杨氏模量的值。 0.5pt

为了估计拉伸强度，我们假设当连接碳原子的“弹簧”具有最大伸长值  $x_{\max}$  时，其弹性势能等于结合能。

**2.4** 计算弹簧的最大伸长的值  $x_{\max}$ 。 0.5pt

**2.5** 计算碳纳米管的拉伸强度值  $\sigma_0$ 。 0.5pt

**2.6** 碳的摩尔质量为 12 克，计算碳纳米管的密度值。 0.5pt

### 3. 带有均匀应力的锥形太空电梯 (2.5 points)

在前一节中，碳纳米管的密度和拉伸强度已经在理论上进行了估算。这些估算值取决于碳纳米管的特殊结构。而建造太空电梯的想法也确实可行。现在我们将研究一种所谓锥形塔的新型太空电梯设计，其横截面随高度变化，以使得应力  $\sigma$  和质量密度  $\rho$  在整个塔架长度上都是保持均匀的。该塔具有轴对称性，并在赤道上竖直放置；其高度大于地球同步卫星轨道的高度，因此塔底压力为零。用  $A_S$  和  $A_G$  分别表示地球表面和同步轨道高度处锥形塔的横截面积。

**3.1** 求出锥形塔截面积  $A(h)$  关于  $h$  的函数， $h$  为从地面向上的高度。 0.5pt

**3.2** 锥形塔采用对称设计，由此塔两端的横截面相等，算出从地心（地球中心）到塔上端的距离值。 0.5pt

**3.3** 锥度比定义为  $A_G/A_S$ 。求出由碳纳米管制成的塔的锥度比，已知拉伸强度为 130 GPa，密度为  $1300 \text{ kg/m}^3$ 。 0.5pt

**3.4** 我们可以通过适当质量的配重将锥形塔提前终止其上端，从而大大缩短电梯的长度。设  $h_C$  为塔尖距地球同步轨道高度的距离，求出配重的质量  $m_C$  与  $h_C$  的关系。 1.0pt

### 4. 应用：将有效载荷发射到轨道上，并将航天器发射到其他行星 (1.5 points)

太空电梯的主要应用是利用塔的旋转能量将有效载荷发射到轨道上或将航天器发送到其他行星。将有效载荷送入太空是非常容易的：我们只需要让它乘坐电梯到达一定高度  $r$  并从静止中释放。为了简化计算，让我们假设塔的运动只发生在地球公转轨道平面上。

**4.1** 求出从地球中心到塔顶的临界高度  $r_C$ ，在这个高度上物体能够从静止状态释放就可以逃离地球的重力。 0.5pt

如果我们希望用它来发射航天器以到达其它行星，就需要建造一个比  $r_C$  更高的塔。设塔的高度距地球中心 10.7 万公里。



- 4.2** 将太空船从塔顶静止释放，它可到达的距太阳的最小距离和最大距离分别是多少？用天文单位表示你的答案。忽视地球在这个高度的引力。 1.0pt