激光干涉引力波天文台 LIGO-GW150914（10 分）

在 2015 年，激光干涉引力波天文台 (LIGO) 第一次侦测到一个经过地球的引力波 (GW) 事件。该事件 (GW150914) 是由两个黑洞在一个近圆轨道互相环绕运行产生的引力波。本题将从检测到的信号特性估算该系统的一些物理参数。

A 部分：牛顿 (守恒性) 轨道（3.0 分）

A.1 双星系统中，两星质量分别为 M_1, M_2，与质心距离分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，即 **1.0pt**

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0\,. \tag{1}$$

假若这个双星系统是一个孤立系统，以非相对论效应低速运行。利用牛顿定律，M_1 星的加速度矢量可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\vec{r}_1}{r_1^n}\,, \tag{2}$$

其中 $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$，求出方程式中的整数 $n \in \mathbb{N}$ 的值（N 表示整数），并求出表达式 $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$，其中 G 是牛顿引力常数 $[G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}]$

A.2 这个双星系统以圆轨道互相环绕运行，其总能量可表达为： **1.0pt**

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G\frac{M\mu}{L}\,, \tag{3}$$

其中

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\,, \qquad M \equiv M_1 + M_2\,, \tag{4}$$

其中 μ 是系统的约化质量，M 是系统的总质量，Ω 是双星的角速度，L 是双星之间的距离 $L = r_1 + r_2$。推导出表达式 $A(\mu, \Omega, L)$，用 μ，Ω 及 L 表示。

A.3 方程式 3 可以简化成 $E = \beta G\frac{M\mu}{L}$，求出式中 β 的数值。 **1.0pt**

B 部份：引入相对论耗散（7.0 分）

关于引力的正确理论是 1915 年爱因斯坦提出的广义相对论。该理论预测到引力交互作用是以光速来传播的，携带交互作用信息的信使称为引力波 GW。每当星体加速时，便会发出引力波而导致整个系统的能量减少。

假设孤立系统内有两个可作为质点处理的星球，爱因斯坦证明了这个系统内质点的速度若足够慢时，系统所发出来的引力波具有如下特征：

1）引力波的频率等于这对星球旋转时的轨道角频率的 2 倍；

2）引力波可以通过发光来描述，发射功率为 $\mathcal{P}$，其可以利用爱因斯坦的四极矩方程式表示：

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}^3Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^3Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right)\,. \tag{5}$$

其中光速 $c \simeq 3\times10^8$m/s. 对于旋转轨道在 $x-y$ 平面上的两质点系统，$Q_{ij}(i,j$ 代表第 i 行第 j 列) 可写成：

$$Q_{11}=\sum_{A=1}^{2}\frac{M_A}{3}\left(2x_A^2-y_A^2\right),\qquad Q_{22}=\sum_{A=1}^{2}\frac{M_A}{3}\left(2y_A^2-x_A^2\right),\qquad Q_{33}=-\sum_{A=1}^{2}\frac{M_A}{3}(x_A^2+y_A^2),\tag{6}$$

$$Q_{12}=Q_{21}=\sum_{A=1}^{2}M_Ax_Ay_A\,,\tag{7}$$

对于所有的其他情况，则有 $Q_{ij}=0$. 这里，(x_A,y_A) 是质心系中的质量 A 的位置。

B.1 对于 A.2 中描述的圆轨道，Q_{ij} 的分量可由下述的关于时间 t 的函数表示： 1.0pt

$$Q_{ii}=\frac{\mu L^2}{2}\left(a_i+b_i\cos kt\right),\qquad Q_{ij}\overset{i\neq j}{=}\frac{\mu L^2}{2}c_{ij}\sin kt\,.\tag{8}$$

求出定 k 的表达式，以 Ω 表示。并求出常数 a_i，b_i，c_{ij} 的数值。

B.2 系统所发出的引力波功率 $\mathcal{P}$，可用以下表达式表示： 1.0pt

$$\mathcal{P}=\xi\frac{G}{c^5}\mu^2L^4\Omega^6\,.\tag{9}$$

求出方程式中 ξ 的数值。(若本小问中未能求得 ξ 的数值，在后面的解题过程中，请取 $\xi=6.4$)。

B.3 在不考虑系统发出引力波 GW 的情况下，这对星体的环绕轨道是一个固定的圆轨道。但当考虑系统发出引力波时，双星系统便会由于发出引力波而失去能量，并使其圆轨道慢慢变小。这时，轨道角速度的变化率 $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ 满足下式： 1.0pt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3=(3\xi)^3\frac{\Omega^{11}}{c^{15}}\left(GM_\mathrm{c}\right)^5,\tag{10}$$

其中 M_c 称为啁啾质量。推导出啁啾质量 M_c 的表达式，用 M 及 μ 表示。这个啁啾质量决定了该系统在圆轨道慢慢变小过程中频率的增加。[「啁啾」一词来自于小鸟所发出的高音（频率上升）]

B.4 使用以上数据，试求出轨道角速度 Ω 与引力波的周期性频率 f_GW 的关系。要知道，对于任何光滑函数 $F(t)$ 在 $a\neq1$ 的情况下： 2.0pt

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\chi F(t)^a\qquad\Rightarrow\qquad F(t)^{1-a}=\chi(1-a)(t-t_0)\,,\tag{11}$$

其中 χ 是常数，t_0 是积分常数，利用上述关系证明方程式 (10) 所对应的引力波频率为：

$$f_\mathrm{GW}^{-8/3}=8\pi^{8/3}\xi\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p}(t_0-t)^{2-p}\tag{12}$$

并求出常数 p 的数值。

在 2015 年 9 月 14 日，由两条长 4 公里 L 型臂构成的 LIGO 探测器记录了 GW150914 事件。事件中两臂相对长

度的变化，如图 1 所示。探测器的两臂与经过的引力波发生线性响应，利用该线性响应对引力波进行了仿真模拟。该引力波由 2 个以近圆轨道互相环绕运动的黑洞产生；因引力波辐射而导致能量流失直至轨道渐渐收窄并最后相撞。图 1 中，D 点后的最高值代表碰撞的一刻。

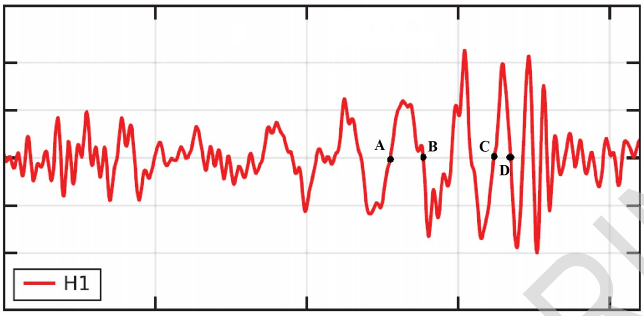

图 1，LIGO 探测器 H1 所侦测到的两臂长度的相对改变量。其中水平轴代表时间，点 A，B，C，D 分别代表时间 $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ 秒。

B.5 利用图 1 分别估算在时刻 1.0pt

$$t_{\mathrm{AB}} = \frac{t_{\mathrm{B}} + t_{\mathrm{A}}}{2} \quad \text{and} \quad t_{\mathrm{CD}} = \frac{t_{\mathrm{D}} + t_{\mathrm{C}}}{2}\,. \tag{13}$$

的 $f_{\mathrm{GW}}(t)$ 的值。
假设在相撞前方程式 (12) 也是有效的（虽然严格来讲不是这样的），且 2 个星体拥有相同的质量。估算出该系统的啁啾质量 M_c 以及总质量的数值，以太阳质量 $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg 表示。

B.6 试估算 t_{CD} 时，2 个星体之间的最小轨道距离值。并利用此距离来估算每个星体的最大半径值 R_{max}。再以此半径计算太阳半径与该星体的最大半径之比 $R_\odot / R_{\mathrm{max}}$(太阳半径 $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km)。估计同一时刻每个星体在最小轨道距离时的轨道线速度 v_{col}，并计算该速度与光速之比值，v_{col}/c 1.0pt

从以上计算可得出结论：这两个星体均是致密而且是非常高速地运动着的。