

生命系统中的物理学

数据：大气压强 $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

A 部分. 血液流动的物理学

在这一部分，考虑两个简化模型，来分析血管中的血液流动。血管的形状近似圆柱形，我们知道，在刚性圆柱体中，对于稳定的、非湍流的不可压缩流体，圆柱体两端流体的压强差可由下面公式给出：

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

其中 ℓ 和 r 是圆柱体的长度和半径， η 是流体粘度系数， Q 是体积流动速率，即单位时间内通过圆柱截面的流体体积。血管内的压强差，通过这个表达式，是通常能够得到正确的数量级的，无论是否考虑脉搏、血管的可压缩性和形状的不规则，也无需考虑血液不是一种简单的流体，而是细胞和血浆的混合物。此外，这个表达式与欧姆定律有着相同的形式，可以将体积流动速率理解为电流，压强差理解为电压，因子 $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ 理解为电阻。

以图 1 所示的对称的小动脉网络为例，该动脉网络将血液输送到人体组织的毛细血管床。在这个网络中，在每个分支中每个血管分成两个相同的血管。而较高级次的血管更细且更短：考虑两个连续级次 i 和 $i+1$ ，其血管半径和长度满足关系 $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ 与 $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$

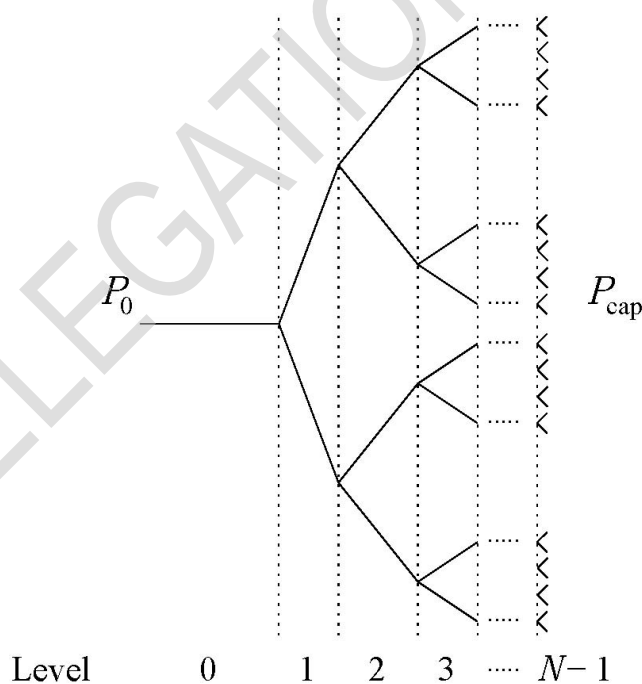
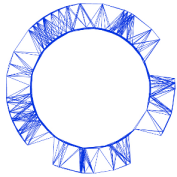


图 1. 小动脉网络

- A.1** 求出在任一级次 i 的血管内体积流动速率 Q_i 的表达式，它是总的级次数 N 、粘度系数 η 、第 0 级的血管半径 r_0 和长度 ℓ_0 、以及 0 级小动脉压强 P_0 和毛细血管床压强 P_{cap} 之间的压强差 $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ 的函数。 1.3pt



- A.2** 如果 0 级小动脉的半径为 $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ ，长度 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ，计算 0 级小动脉中体积流动速率 Q_0 的数值。已知小动脉入口处的压强为 55mmHg，血管网络有 $N = 6$ 个级次连接小动脉和毛细血管床，毛细血管的压强为 30mmHg，血液粘度 $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ，计算出 Q_0 的数值结果，以 ml/h 为单位。 0.5pt

血管的 LCR 等效电路

由于一些原因，刚性圆柱血管的近似是不精确的。特别重要的是，必须考虑到流量随时间变化，以及在由心脏驱动的血流循环中压强变化时血管直径的变化。此外，实际情况中，在较大的血管内，一个循环中的血压变化很大，而在较小的血管中，压强波动的幅度要小得多，而且流动几乎不随时间变化。

当一个弹性血管的压强增大时，它的直径会增加，从而允许在血管中储存更多的血液，并在压强下降时将其输送出去。可以通过在我们前面描述的模型中加入一个电容，来考虑血管的弹性行为。此外，当考虑到血液流动速率与时间有关时，还必须考虑到：血液的惯性正比于它的密度 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 。在我们的这个模型中，惯性可以用电感来描述。在图 2 中，我们画出了这个模型中单个血管的等效电路。等效电容和电感分别由下式给出：

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{and} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

其中， h 为血管壁厚度， E 为动脉血管的杨氏模量，该系数描述了施加外力时血管组织大小的变化。杨氏模量具有压强单位，小动脉的杨氏模量在 $E = 0.06 \text{ MPa}$ 量级。

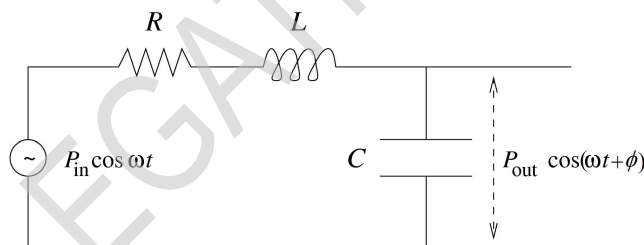


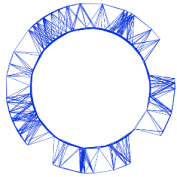
图 2. 单个血管的等效电路

- A.3** 对于一个角频率为 ω 的血液流动，在平衡时，求出血管出口的压强的振幅 P_{out} 的表达式，它是入口处压强的振幅 P_{in} 、等效电阻 R 、电感 L 和电容 C 的函数。在低频时，要保证出口处的压强振幅小于入口处的压强振幅，那么 η 、 ρ 、 E 、 h 、 r 和 ℓ 这几个参量之间要满足一个条件，求出这个条件。 2.0pt

- A.4** 对于 A.2 中的血管网络，估算最大的动脉壁厚度 h ，以使得 A.3 中的条件得到满足 (假设 h 与级次无关)。 0.7pt

B 部分 肿瘤生长

肿瘤的生长是一个非常复杂的过程，细胞增殖和自然选择等生物学机制与物理学机制交织在一起。事实上，要定量地描述肿瘤生长，就必须考虑血流动力学、血氧和营养的扩散、细胞和施加在组织上的力。在这部分问题中，我们将考虑一个简化的肿瘤生长模型，它可以解决实体肿瘤中常见的压强增加的问题。



一组正常的细胞形成一个组织，被不可扩展的基底膜包围，基底膜迫使这个组织始终保持相同的形状：一个半径为 R 、大小不变的球体 (图 3)。

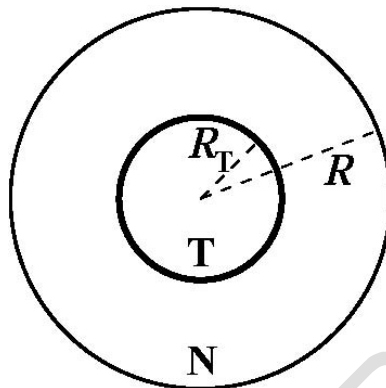


图 3. 简化的肿瘤

最初，组织所受到的净力为 0，也就是每个点的压强都等于大气压。

当 $t = 0$ 时，肿瘤在这个球体的中心开始生长，随着它的生长，组织内的压强增加。考虑到组织 (包括正常组织，用 N 表示，和肿瘤组织，用 T 表示) 是可压缩的，这样它们的密度 ρ_N 和 ρ_T ，随着压强而线性增长：

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

其中 ρ_0 是周围未受压的正常组织密度， p 是受压缩组织压强与大气压强的压强差， K_N, K_T 分别为是正常和肿瘤组织的压缩系数 (或体积模量)。一般来说，肿瘤较硬，所以体积模量较高。

B.1 当肿瘤生长时，正常细胞的质量不会改变。求出肿瘤体积与总组织体积的比值 $v = V_T/V$ ，它是 μ 和 κ 的函数。 μ 为肿瘤质量 (M_T) 和正常组织质量 (M_N) 的比值， $\mu = M_T/M_N$ ； κ 为正常组织和肿瘤组织体积模量的比值， $\kappa = K_N/K_T$ 1.0pt

热疗有时与化疗和放疗一起用于治疗癌症。在热疗中，癌细胞被选择性地从正常体温 37°C 加热到 43°C 以上，从而导致癌细胞死亡。研究人员目前正在开发一种碳纳米管药物，在碳纳米管上面覆盖着能够与肿瘤细胞结合的特殊蛋白质。当组织受到近红外辐射时，纳米管会比周围的组织吸收更多的辐射，因此可以有选择地加热与它们连在一起的肿瘤细胞。

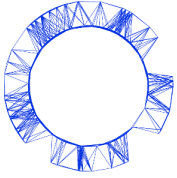
考虑肿瘤组织、正常组织以及周围组织具有相同的恒定导热系数 k ，即在本题的模型中，在单位时间内通过半径为 r 的球面的单位面积的能量等于温度关于 r 的导数乘以 k 。碳纳米管在肿瘤组织内均匀分布，并在单位体积内释放功率为 \mathcal{P} 的热能。

B.2 稳态条件下，求出肿瘤中心的温度，它是 \mathcal{P} 、 k 、人体温度、以及肿瘤半径 R_T 的函数。 1.7pt

B.3 对一个半径为 5.0cm 的肿瘤块加热到 43.0°C 以上，计算单位体积所需要的最小功率 \mathcal{P}_{\min} 的值。已知肿瘤组织的热导率为 $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ 。 0.5pt

考虑肿瘤由 A.1 问题中所示的枝状结构的血管网络供血。随着肿瘤的增长，当其压强 p 大于最细的毛细血管的压强 P_{cap} 时，这些血管的半径将减少 δr 。如果肿瘤的压强 p 达到一个临界值 p_c (相应的半径减少 δr_c)，最细的

Theory



IPHO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-4

CHN (China)

毛细血管就会崩溃，严重影响肿瘤的供血。压强和半径的变化可以通过以下唯象关系来关联：

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

考虑当肿瘤压强增加时，只是最小的血管 (级次 $N - 1$) 半径发生了改变。

B.4 在线性区域内 (即认为 $p - P_{\text{cap}}$ 很小), 求出最细的血管的流动速率的相对下降率, $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$, 它是肿瘤体积比值 $v = V_T/V$ 、以及 $K_N, N, p_c, \delta r_c, r_{N-1}, P_{\text{cap}}$ 的函数。 2.3pt

DELEGATION PRINT