

## 微波炉的物理

这个题目是关于微波炉中微波的产生，及其加热食物的用途。微波是在一个被称为“磁控管” (magnetron) 的装置中产生的。Part A 是关于磁控管的原理，Part B 是食物对微波的吸收。

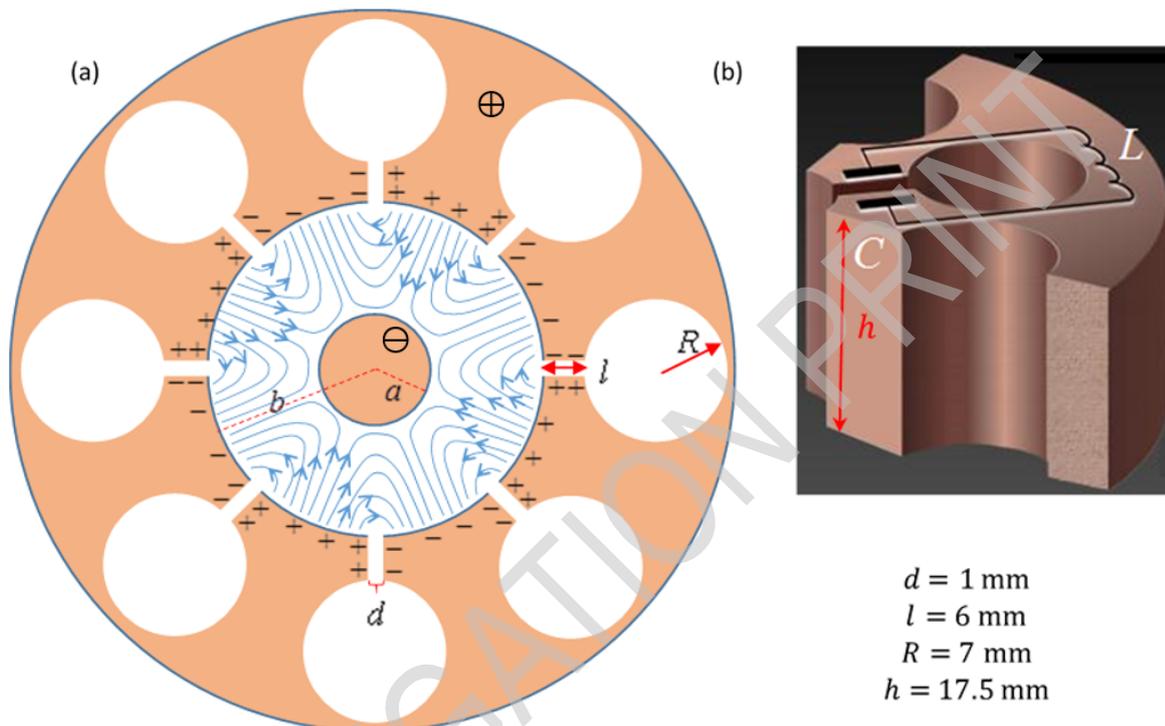


图 1

### Part A: 磁控管的结构与原理 (6.6 分)

磁控管是用来产生微波辐射的装置，可产生脉冲（用于雷达）或连续（比如在微波炉中）的微波。磁控管有一种自放大的振荡模式。对磁控管加上静态（非交流）电压可很快地激发这一模式。产生的微波辐射再从磁控管输出。

典型的微波炉磁控管由铜质实心圆柱形阴极（半径为  $a$ ）和环绕它的阳极（半径为  $b$ ）组成。阳极为较厚的圆柱外壳形状，并钻有多个圆柱型空腔。这些空腔被称为“谐振器”。其中一个谐振器连接到天线，把微波能量发射输出。在下面的题目中忽略天线。所有内部空间都是真空。考虑图 1(a) 显示的一种典型的具有 8 个谐振腔的磁控管。图 1(b) 所示为单个谐振腔的三维结构。如图所示，八个腔中的每一个都表现为电感—电容 (LC) 谐振器，其谐振频率为  $f = 2.45 \text{ GHz}$ 。

沿着磁控管轴向施加一个静态均匀磁场，指向页面外（图 1(a)）。在阳极和阴极之间还施加一个恒定电压。从阴极发射的电子达到阳极使其带电，因而激发出一个振荡模式，该模式中，每两个相邻谐振器之间的电荷的符号是相反的。谐振腔可以放大这种振荡。

上述过程在阴极和阳极之间产生了一个交变的电场（图 1(a) 中的蓝线；静电场没有画出），其交变频率为前述的  $f = 2.45 \text{ GHz}$ 。这个交变的电场叠加在恒定电压引起的静电场上。阳极和阴极之间的交变电场的典型振幅约为静电场的  $\frac{1}{3}$ 。电子在阴极和阳极之间的运动受到静电场与交变电场的共同作用。这使得到达阳极的电子将它们从静电场获得的大约 80% 的能量转换给交变场。少数发射出的电子返回到阴极后释放更多的电子，进一步放大了交变场。

# Theory



# Q2-2

Chinese (China)

每个谐振器可认为有电容和电感，如图 1(b) 所示。该电容主要来自谐振器表面的平面部分，而电感来自圆柱形部分。假定谐振器中的电流均匀地沿着圆柱形谐振腔的表面流动，且该电流产生的磁场强度是理想无限长螺线管的 0.6 倍。图 1(b) 给出了谐振器的几何参数及其数值。真空磁导率和介电常数分别为  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$  和  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ 。

- A.1** 用上述数据计算谐振器的谐振频率  $f_{\text{est}}$ 。(你的计算结果可能会与题目给出的  $f = 2.45 \text{ GHz}$  的实际值不同。在下面的问题中使用题目给出的实际值。) 0.4pt

问题 A.2 不涉及磁控管本身，但有助于理解相关的物理。考虑在自由空间中运动的电子，受到一个指向  $y$  轴负方向的均匀的电场  $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$  和一个沿正  $z$  轴方向的均匀磁场  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  的作用。(  $E_0$  和  $B_0$  是正的，  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  是单位矢量，按常规取向)。我们用  $\vec{u}(t)$  表示电子在  $t$  时刻速度。电子的漂移速度  $\vec{u}_D$  被定义为它的平均速度。我们用  $m$  和  $-e$  分别表示电子的质量与电荷。

- A.2** 在以下两种情况下，求出  $\vec{u}_D$ ，并在答题纸中画出在  $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$  的时间范围内电子的轨迹： 1.5pt
- $t = 0$  时电子的速度为  $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ ,
  - $t = 0$  时电子的速度为  $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ .

我们现在再来讨论磁控管的情况。阴极和阳极之间的距离是 15 mm。由于前述的能量的损失，假设每个电子的最大动能不超过  $K_{\text{max}} = 800 \text{ eV}$ 。静磁场的强度为  $B_0 = 0.3 \text{ T}$ 。电子的质量和电荷分别为  $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  和  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 。

- A.3** 在一个参照系中数值估算电子运动轨迹的最大半径，该参照系中电子的运动近似为圆形，且该参照系近似为惯性系。 0.4pt

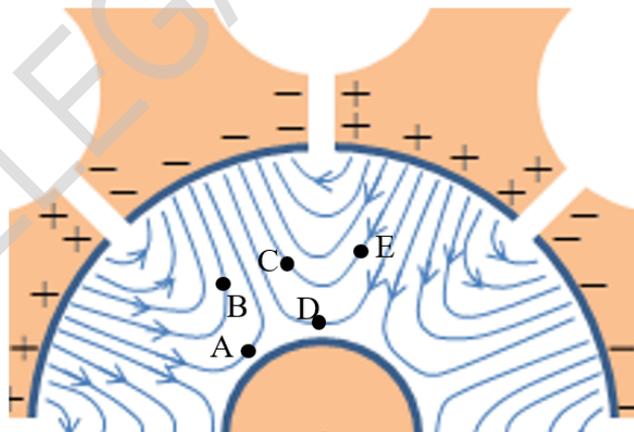


图 2

- A.4** 图 2 所示为某一时刻阳极和阴极之间的交变电场线（静电场电场线未画出）。在答题纸中指出此时此刻在 A, B, C, D 和 E 处的电子，哪些电子会飘向阳极，哪些会飘向阴极，哪些电子的漂移方向完全垂直于半径方向。 1.2pt

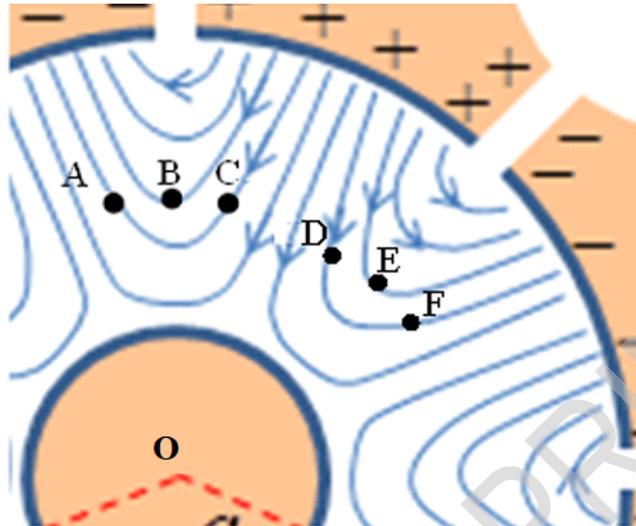


图 3

图 3 所示为某一时刻阳极和阴极之间的交变电场线（静电场电场线未画出）。A、B、C、D、E 和 F 为该时刻 6 个电子的位置。所有电子距阴极的距离相同。

- A.5** 考虑图 3 中的情况，对于 6 个电子对 AB、AC、BC、DE、DF、EF 中的每个电子对，在答题纸中指出该时刻它们的漂移是否会导致它们与阴极中心 O 的连线的夹角增大或减小 [whether their drift will cause the angle between their positions (measured from the cathode's center O) to increase or decrease at that moment]. 1.2pt

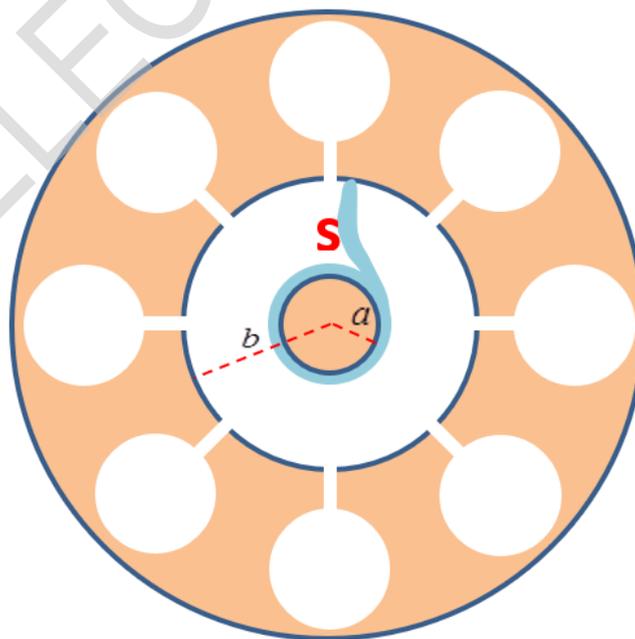


图 4



在问题 A.5 中会发现有一种聚焦机制，将阴极和阳极之间的电子会聚成辐条形状。图 4 描绘了一个这样的辐条，用 S 标出。

- A.6** 在答题纸中绘出此时刻的其它辐条们。用箭头们标出它们的旋转方向，并计算它们的平均角速度  $\omega_s$ 。 0.8pt

假设阴极和阳极之间的中点处的总电场等于从阴极到阳极的径向静电场的平均值，并且在该中点的辐条大致是沿径向的。阴极和阳极的半径 ( $a$  和  $b$ ) 见图 4。

- A.7** 写出使磁控管以上述工作所需的静电电压  $V_0$  的近似表达式 [Find an approximate expression for the static voltage  $V_0$  required for operating the magnetron in the manner described]。 (你计算得到的电压值是磁控管工作所需的最小值。最优工作电压会更高一些。) 1.1pt

### Part B: 微波辐射与水分子的作用 (3.4 分)

这部分我们利用微波辐射（从磁控管的天线辐射进微波炉的食品室）来烹饪，就是加热一种有损耗的介电材料，比如纯净水或者盐水（盐水可以看作汤的模型）。

电偶极子模型是一对大小相同的正负电荷  $q$  与  $-q$  相隔一小段距离  $d$ ，电偶极矩矢量从负电荷指向正电荷，大小为  $p = qd$ 。

随时间变化的电场  $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$  作用在单个电偶极子  $\vec{p}(t)$  上，该电偶极子具有恒定的幅度： $p_0 = |\vec{p}(t)|$ 。电偶极子与电场之间的夹角为  $\theta(t)$ 。

- B.1** 写出下列表达式：电场作用在电偶极子上的力矩的大小  $\tau(t)$ ，以及电场传输给电偶极子的功率的大小  $H_i(t)$ 。用  $p_0$ ,  $E(t)$ ,  $\theta(t)$  和它们的导数来表示。 0.5pt

水分子是有极性的，因此可以当成电偶极子来处理。但由于在液态水分子之间强大的氢键，我们不能将水分子视为各自独立的偶极子。因而我们应该考虑极化矢量  $\vec{P}(t)$ ，它是偶极矩密度（单位体积的水分子的平均电偶极矩）。极化矢量  $\vec{P}(t)$  平行于作用在该处的局域交变电场（由微波产生）， $\vec{E}(t)$ ，并随时间振荡，振荡幅度正比于局部交变电场的幅度，但有相位滞后  $\delta$ 。

在水中给定位置处的局域交变电场为  $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$ ，其中  $\omega = 2\pi f$ ，它引起极化矢量  $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$ ，其中  $\beta$  是表征水的性质的一个无量纲的常数。

- B.2** 写出单位体积的水吸收功率的时间平均值  $\langle H(t) \rangle$  的表达式。含时的周期函数  $f(t)$  在一个周期  $T$  内的时间平均值的定义为： 0.5pt

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

现在考虑微波辐射在水中的传播。水的相对介电常数（在电磁场频率下）为  $\epsilon_r$ ，相应的水的折射率为  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 。电场的瞬时能量密度为  $\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2$ 。磁场与电场的平均能量密度相等。

- B.3** 用  $I(z)$  来表示辐射能量通量密度（energy flux density）的时间平均（单位面积上的平均辐射功率流（power flow））。这里  $z$  是进入水的深度，辐射沿  $z$  方向传播。写出该通量密度  $I(z)$  对  $z$  的依赖关系式，该通量密度在水表面的值  $I(0)$  可以出现在结果中。 1.1pt

位相差  $\delta$  是由于水分子间的相互作用导致的结果。位相差取决于无量纲的介电损耗系数  $\epsilon_i$  和相对介电常数  $\epsilon_r$ 。

(两个常数都与微波辐射的角频率  $\omega$  和温度有关), 且具有以下关系:  $\tan \delta = \varepsilon_l / \varepsilon_r$ 。当  $\delta$  足够小时, 在水中深度为  $z$  处的电场为:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

其中  $k_0 = \omega/c$ ,  $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  是真空光速。

**B.4** 在  $\tan \delta \approx \sin \delta$  近似关系下, 利用其它参数写出 B.2 问中系数  $\beta$  的表达式。 0.6pt

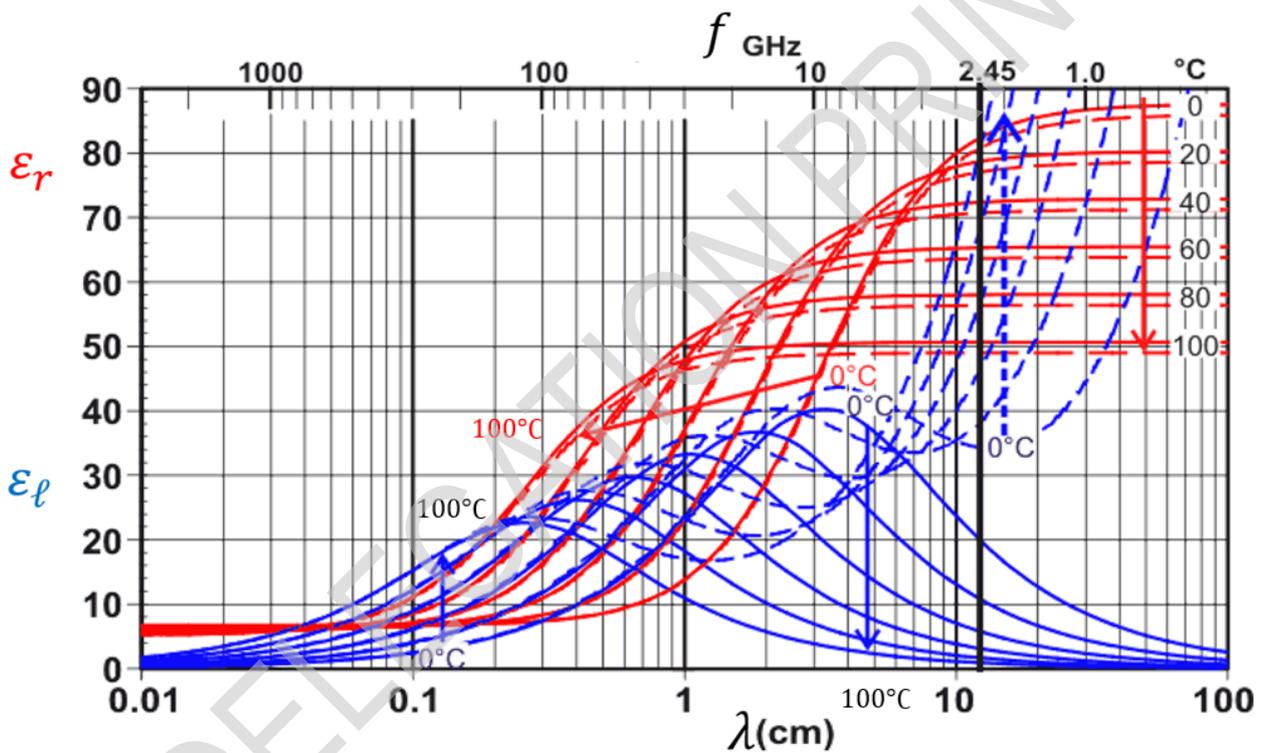


图 5

图 5 画出了纯水 (实线) 和稀盐水 (虚线) 的  $\varepsilon_l$  (蓝色) 与  $\varepsilon_r$  (红色), 在几个不同的温度下, 随波长或频率的变化。箭头指示了从  $0^\circ\text{C}$  到  $100^\circ\text{C}$  的各曲线。角频率  $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  在图中用一条粗的竖直线标出, 下面我们只考虑微波辐射在此频率时的情形。

**B.5** 利用图 5 回答下列问题: 0.7pt

- 对于  $20^\circ\text{C}$  的纯水, 计算出进入深度  $z_{1/2}$  的值,  $z_{1/2}$  是指在这一深度时单位体积的功率是  $z = 0$  表面处的一半。
- 在答题纸中指明微波照射纯水时, 随温度升高, 进入深度是增加, 减少还是保持不变。
- 在答题纸中指明微波照射汤 (稀盐水) 时, 随温度升高, 进入深度是增加, 减少还是保持不变。