

## 热声发动机

热声发动机是一种把热转换成诸如声功率或者声波等机械功的装置。像其他许多热机一样，它可以反向运行成为制冷机，利用声将热从冷库输向热库。高运行频率减少热传导并消除对任何工作室的限制。与许多其他热机不同，除了工作流体本身，热声发动机没有任何活动部件。

热声机器的效率通常比其他类型的引擎低，但它具有搭建 (set up) 和维护成本优势。这为可再生能源应用创造机会，例如太阳能热电厂和废热利用等。我们的分析将集中在系统内产生声能，忽略给外部设备供电的提取或转换。

### Part A: 封闭管中的声波 (3.7 分)

考虑一个长度为  $L$  和横截面积为  $S$  的绝热管，其轴线沿  $x$  方向。管的两端位于  $x = 0$  和  $x = L$ 。管两端封闭，其内充满理想气体。在平衡时，气体具有温度  $T_0$ ，压强  $p_0$  和质量密度  $\rho_0$ 。假设气体粘度可以忽略不计，气体运动只能在  $x$  方向。(在垂直的  $y$  和  $z$  方向，气体运动和性质都是均匀的。)



图 1

- A.1** 当形成声驻波时，气体单元 (gas elements) 以角频率  $\omega$  沿  $x$  方向振动。振幅取决于每个单元沿管的平衡位置  $x$ 。每个气体单元相对其平衡位置  $x$  的纵向位移由下式给出 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(请注意这里  $u$  描述气体单元的位移)

其中  $a \ll L$  是正常数， $k = 2\pi/\lambda$  是角波数， $\lambda$  是波长。在这个系统中最大可能的波长  $\lambda_{\max}$  是多少？

我们假设在本道大题中一直是  $\lambda = \lambda_{\max}$  的振荡模式。

现在，考虑一个狭窄的气体元 (parcel of gas)，静止时位于  $x$  和  $x + \Delta x$  之间 ( $\Delta x \ll L$ )。作为 A.1 中的位移波的结果，气体元沿  $x$  轴振荡并经历体积变化以及其他热力学性质的变化。

在以下所有问题中，假设所有热力学性质的变化相比没受扰动的值都是小的。

- A.2** 气体元体积  $V(x, t)$  在其平衡值  $V_0 = S\Delta x$  附近振荡，并有形式 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

推出  $V_1(x)$  的表达式，用  $V_0$ ,  $a$ ,  $k$  和  $x$  表示。

- A.3** 假设气体总压强，由于声波的原因，近似取形式 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

通过考虑作用于气体元的力，求出压强振荡的振幅  $p_1(x)$  (保留主要项)，用其位置  $x$ ，平衡密度  $\rho_0$ ，位移振幅  $a$  和波的参量  $k$  和  $\omega$  表示。

在声波频率下，可忽略气体的热传导。我们将气体元的膨胀和收缩当作纯粹的绝热过程，满足关系  $pV^\gamma = \text{const}$ ,

其中  $\gamma$  是绝热常数。

- A.4** 使用上述关系和先前问题的结果，求在管中声波的速度表达式  $c = \omega/k$ ，取一级近似。 0.3pt  
用  $p_0, \rho_0$  和绝热常数  $\gamma$  表示你的答案。

- A.5** 在声波的影响下，由于绝热膨胀和收缩导致的气体温度变化，取以下形式： 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

求出温度振荡的振幅  $T_1(x)$ ，用  $T_0, \gamma, a, k$  和  $x$  表示。

- A.6** 我们假设管与气体之间有弱的热相互作用 (该假设仅用于求解 A.6 问题)。其结果是声波驻波几乎保持不变，但气体可以与管交换少量的热量。由粘性引起的发热可以忽略不计。 1.2pt  
对于图 2 中的每个点 (A, C 在管边缘, B 在中心)，在长时间看来，判断其上温度是增加，减少，还是保持不变。

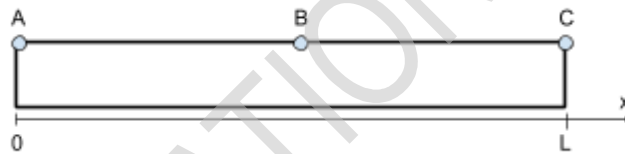


图 2

### Part B: 外部热接触引起的声波放大 (6.3 分)

将很多个薄的固体板彼此分隔叠放置于管内。堆栈的板面与管轴方向平行，以便不阻碍沿管的气流。堆栈板的中心位于  $x_0 = L/4$ ，其沿管轴的延展宽度  $\ell \ll L$ ，并填充整个横截面 (板间间隔空隙还保留)。堆栈板的右和左边缘，保持温度差  $\tau$ 。堆栈板的左边缘位于  $x_H = x_0 - \ell/2$  处，通过外部热库保持温度  $T_H = T_0 + \tau/2$ 。与此同时，其右边缘，在  $x_C = x_0 + \ell/2$ ，温度保持  $T_C = T_0 - \tau/2$ 。

堆栈板内允许有轻微的纵向热流以保持其左右两边缘间恒定的温度梯度，使得  $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$ 。

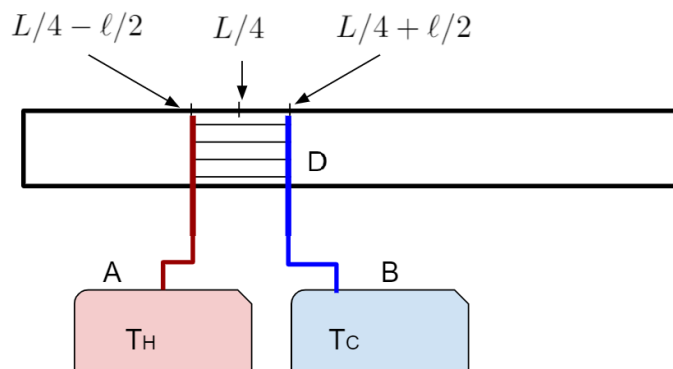


图 3. 系统草图。(A) 和 (B) 分别表示高温和低温热库。(D) 表示堆栈板



为了分析堆栈板与管内声波中气体的热接触效应，做出以下假设：

- 与前部分类似，所有热力学性质的变化相比没受扰动时的值是小的。
- 系统在可能的最长波长的基频驻波模式下工作。它只是由于堆栈板的存在而略微改变。
- 堆栈板比波长要短得多  $\ell \ll \lambda_{\max}$ ，因此可放置于既足够远离位移的节点也足够远离压强的节点处，以使得气体位移  $u(x, t) \approx u(x_0, t)$  和压强  $p(x, t) \approx p(x_0, t)$  在整个堆栈板的长度方向 ( $x$  轴方向) 可以被认为是均匀的。
- 我们可以忽略由于气体元移入和移出堆栈板而导致的任何边缘效应。
- 堆叠板两端之间的温差，即高温和低温热库之间的温度差异，相比于其温度是小的： $\tau \ll T_0$ 。
- 通过堆栈板、通过气体和沿着围管的热传导可以忽略不计。唯一显著的热传输原因是由于气体运动引起的对流和气体与堆栈板之间的传导。

- B.1** 考虑堆栈板区域内的特定气体元，最初在  $x_0 = L/4$ 。当气体元在堆栈板内移动时，气体元所在位置处堆栈板的温度，有如下变化： 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

用  $a, \tau$  和  $\ell$  表示  $T_{\text{st}}$ 。

- B.2** 温度差高于某个临界值  $\tau_{\text{cr}}$  时，气体将从高温热库向低温热库传送热。用  $T_0, \gamma, k$  和  $\ell$  表示  $\tau_{\text{cr}}$ 。 1.0pt

- B.3** 求出流入小气体元的热流  $\frac{dQ}{dt}$  作为体积变化率和压强变化率的线性函数的一般近似表达式。用体积变化率  $\frac{dV}{dt}$  和压强变化率  $\frac{dp}{dt}$ ，未受扰动时气体元的压强和体积的平衡值  $p_0$  和  $V_0$ ，以及绝热指数  $\gamma$  表示你的答案。（你可以使用等容摩尔热容量表达式  $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ ，其中  $R$  是气体常数。） 0.8pt

气体元和堆栈板之间的有限热流导致了气体元的压强和体积的振动相位产生差异。我们将看到这个如何产生功。

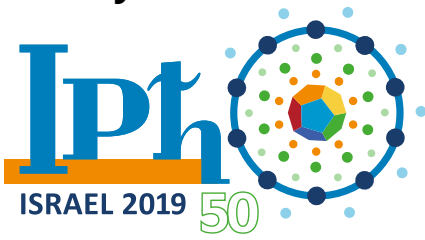
从堆栈板进入到气体元的热通量正比于气体元和相邻堆栈板单元之间的温度差，近似由  $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$  给出。这里  $T_1$  和  $T_{\text{st}}$  分别是问题 A.5 和 B.1 中的气体元和相邻堆栈板的温度振幅，并且  $\beta > 0$  是常数。假设在机器运行频率，由于这种热流动引起的气体温度变化相比  $T_1$  和  $T_{\text{st}}$  都是微不足道的。

- B.4** 为了计算功，我们将考虑由于与堆栈板的热接触而导致的运动的气体元的体积改变。我们把受到堆栈板影响的压强和体积写成形式： 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

已知  $p_a$  和  $p_b$ ，求出  $V_a$  和  $V_b$ 。用  $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a$  和  $\ell$  表示你的答案。

- B.5** 求出在一个周期内由气体元产生的每单位体积的声学功 (acoustic work)  $w$ 。对堆栈板区域的体积做积分以得到一个周期内气体产生的总功  $W_{\text{tot}}$ 。用  $\gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, k$  和  $S$  表示  $W_{\text{tot}}$ 。 0.8pt



## Q3-4

Chinese (China)

**B.6** 求出在一个周期内从  $x = x_0$  左侧截面传输到右侧的热  $Q_{\text{tot}}$  的近似表达式。用  $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, \ell$  表示你的答案。  
(提示：你可以使用对流产生的热流公式  $j = Q \frac{du}{dt}$ 。)

**B.7** 求出热声发动机的效率  $\eta$ 。效率定义为产生的声学功与从高温热库吸取的热量之比。用高温热库和低温热库之间的温度差  $\tau$ 、临界温度差  $\tau_{\text{cr}}$  和卡诺效率  $\eta_c = 1 - T_C/T_H$  表示你的答案。

DELEGATION PRINT