

## 第 37 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答

一、(1) 依题意, 空气弹簧主气室对簧上负载竖直向上的作用力为

$$F = (p_1 - p_0)A_e \quad (1)$$

式中,  $p_1$  是主气室内空气的压强。

当空气弹簧承受的负载发生变化时, 主气室内气体的压强  $p_1$  和体积  $V_1$  均会发生变化。为了统一处理题给的两种情形, 考虑气体压强和体积变化的过程方程为

$$p_1 V_1^n = \text{常量} \quad (2)$$

式中,  $n$  是常数。①式左右两边对空气弹簧承载面的竖直位移  $y$  微商, 可知空气弹簧的劲度系数  $K$  满足

$$K \equiv \frac{dF}{dy} = (p_1 - p_0) \frac{dA_e}{dy} + \frac{dp_1}{dy} A_e \quad (3)$$

②式左右两边对  $y$  微商得

$$\frac{dp_1}{dy} V_1^n + n p_1 V_1^{n-1} \frac{dV_1}{dy} = 0 \quad (4)$$

由题意知, 空气弹簧主气室内体积  $V_1$  和有效承载面积  $A_e$  相对于平衡位置的竖直位移的变化率为

$$\frac{dV_1}{dy} = -\alpha, \quad \frac{dA_e}{dy} = \beta \quad (5)$$

联立①③④⑤式得, 空气弹簧的劲度系数  $K$  与其有效承载面积  $A_e$  之间的关系为

$$K = \alpha \frac{k p_{10} V_{10}^n}{V_1^{k+1}} A_e + \beta \left[ p_{10} \left( \frac{V_{10}}{V_1} \right)^n - p_0 \right] \quad (6)$$

在高铁上下乘客的情形下, 主气室内气体压强和体积变化满足等温过程

$$n = 1 \quad (7)$$

由⑥⑦式得

$$K = \alpha \frac{p_{10} V_{10}}{V_1^2} A_e + \beta \left[ p_{10} \frac{V_{10}}{V_1} - p_0 \right] \quad (8)$$

在列车运行中遇到强烈颠簸的情形下, 主气室内气体压强和体积变化满足绝热过程

$$n = \gamma \quad (9)$$

式中,  $\gamma$  是空气的定压摩尔热容  $C_p$  与定容摩尔热容  $C_v$  之比

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \quad (10)$$

由⑥⑨式得

$$K = \alpha \frac{7 p_{10} V_{10}^{7/5}}{5 V_1^{12/5}} A_e + \beta \left[ p_{10} \left( \frac{V_{10}}{V_1} \right)^{7/5} - p_0 \right] \quad (11)$$

(2) 主气室连通附加气室后, 如果车辆振动频率较低, 例如情形 i), 空气弹簧变形较慢, 可认为在任意瞬间, 空气弹簧主气室的压强与附加气室的压强相同, 两气室间的压强差可视为零。两气室的空气作为一个整体, 经历等温过程。空气弹簧的劲度系数  $K$  与其有效承载面积  $A_e$  之间的关系

$$K = \alpha \frac{p_{10}(V_{10} + V_2)}{(V_1 + V_2)^2} A_e + \beta \left[ p_{10} \frac{V_{10} + V_2}{V_1 + V_2} - p_0 \right] \quad (12)$$

对于情形 ii)，车辆系统的振动频率较高，空气弹簧主气室内部的压力和体积变化较快，主气室与附加气室之间来不及进行气体流动，此时空气弹簧的容积相当于主气室容积单独作用，经历绝热过程。空气弹簧的劲度系数  $K$  与其有效承载面积  $A_e$  之间的关系为

$$K = \alpha \frac{7p_{10}V_{10}^{7/5}}{5V_1^{12/5}} A_e + \beta \left[ p_{10} \left( \frac{V_{10}}{V_1} \right)^{7/5} - p_0 \right] \quad (13)$$

二、(1) 对击球过程应用刚体质心运动的动量定理，有

$$P = mu_0 - 0 \quad (1)$$

式中， $u_0$  是击打结束后的瞬间母球质心的速度（与冲量  $P$  同向）。母球受到的相对于其质心的冲量矩为

$$J = P \frac{R}{2} \quad (2)$$

对击球过程应用刚体转动的角动量定理有

$$J = I\omega_0 - 0 \quad (3)$$

式中， $\omega_0$  是在击打结束后的瞬间母球的转动角速度。母球的转动惯量为

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \quad (4)$$

在击球结束后的瞬间，母球上与桌面相接触的点A的速度为

$$v_A = u_0 - R\omega_0 \quad (5)$$

由①②③④⑤式可知，在击球结束的瞬间，母球上A点的速度为

$$v_A = -\frac{P}{4m} < 0 \quad (6)$$

A点沿着x轴（取x轴正向与  $P$  同向）负方向滑动。小球受到沿x轴正方向的摩擦力  $F_f$  为

$$F_f = \mu mg \quad (7)$$

在击球结束后的时刻  $t$ ，应用刚体的质心运动定理和相对于质心的动量矩定理有

$$m\dot{u} = F_f \quad (8)$$

$$I\dot{\omega} = -\mu mgR \quad (9)$$

式中，取  $\omega$  与  $\omega_0$  同向为正。由①②③④⑤⑧⑨式可知， $t$  时刻母球质心的速度和绕质心转动的角速度分别为

$$u(t) = u_0 + \dot{u}t = u_0 + \mu gt \quad (10)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}t = \frac{PR}{2I} - \frac{\mu mgRt}{I} \quad (11)$$

在  $t$  时刻，A 点的速度为

$$v_A(t) = u(t) - R\omega(t) = \frac{7}{2} \mu gt - \frac{P}{4m} \quad (12)$$

由⑫式可知，接触点A的速度随时间的增加逐渐由负值变为

$$v_A(t_0) = 0$$

时，母球开始做纯滚动。由上式和(12)式得，母球被击打后经过时间

$$t_0 = \frac{P}{14\mu mg} \quad (13)$$

开始做纯滚动，此时母球球心C的速度为

$$u_c = \mu g t_0 + u_0 = \frac{15P}{14m} \quad (14)$$

(2) 由纯滚动条件知，在任意时刻  $t' > 0$ ，水平滚动距离等于 B 点（此点就是在击球结束后的瞬间母球上与桌面相接触的点 A）从时刻  $t' = 0$  到时刻  $t'$  经过的弧长，该弧长对应的圆心角为

$$\theta = \frac{u_c t'}{R} \quad (15)$$

B 点在时刻  $t'$  的位置为

$$x_B = u_c t' - R \sin \theta = \frac{15P}{14m} t' - R \sin \frac{u_c t'}{R} = \frac{15Pt'}{14m} - R \sin \frac{15Pt'}{14mR} \quad (16)$$

$$y_B = R(1 - \cos \theta) = R \left( 1 - \cos \frac{u_c t'}{R} \right) = R \left( 1 - \cos \frac{15Pt'}{14mR} \right) \quad (17)$$

这里，以 B 点在  $t' = 0$  的位置为坐标原点，x 轴与 P 同向，y 轴正向竖直向上。(16)(17)式两边对时间求导得，B 点速度分量为

$$v_{Bx} = u_c (1 - \cos \theta) = u_c \left( 1 - \cos \frac{u_c t'}{R} \right)$$

$$v_{By} = u_c \sin \theta = u_c \sin \frac{u_c t'}{R}$$

B 点速度的大小为

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2u_c \sin \frac{u_c t'}{2R} = \frac{15P}{7m} \sin \frac{15Pt'}{28mR} \quad (18)$$

设 B 点速度的方向与水平方向的夹角为  $\alpha$ ，则

$$\tan \alpha = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} = \frac{\sin \frac{u_c t'}{R}}{1 - \cos \frac{u_c t'}{R}} = \frac{2 \sin \frac{u_c t'}{2R} \cos \frac{u_c t'}{2R}}{2 \sin^2 \frac{u_c t'}{2R}} = \cot \frac{u_c t'}{2R}$$

故

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{u_c t'}{2R} = \frac{\pi}{2} - \frac{15Pt'}{28mR} \quad (19)$$

将 B 点速度分量对时间求导得，B 点的加速度分量为

$$a_{Bx} = \frac{u_c^2}{R} \sin \frac{u_c t'}{R},$$

$$a_{By} = \frac{u_c^2}{R} \cos \frac{u_c t'}{R}$$

加速度大小为

$$a_B = \frac{u_c^2}{R} = \left( \frac{15}{14} \right)^2 \frac{P^2}{m^2 R} \quad (20)$$

方向指向母球球心 C。

三、(1) 左侧回路电势之和为零, 有

$$Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + (-R_0)i(t) = 0 \quad (1)$$

题给的  $i(t)$  的一般形式是

$$i(t) = \alpha_1 e^{\beta_1 t} + \alpha_2 e^{\beta_2 t} \quad (2)$$

由初始条件有

$$\begin{cases} i(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ i'(0) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = \beta \end{cases} \quad (3)$$

由③式知

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0. \quad (4)$$

将②式代入①式得

$$(R - R_0)(\alpha_1 e^{\beta_1 t} + \alpha_2 e^{\beta_2 t}) + L \frac{d}{dt} (\alpha_1 e^{\beta_1 t} + \alpha_2 e^{\beta_2 t}) + \frac{1}{C} \int_0^t (\alpha_1 e^{\beta_1 t'} + \alpha_2 e^{\beta_2 t'}) dt' = 0$$

得

$$\alpha_1 \left[ (R - R_0) + L\beta_1 + \frac{1}{C\beta_1} \right] e^{\beta_1 t} + \alpha_2 \left[ (R - R_0) + L\beta_2 + \frac{1}{C\beta_2} \right] e^{\beta_2 t} = \frac{1}{C} \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)$$

两边对  $t$  微商得

$$\alpha_1 \left[ L\beta_1^2 + (R - R_0)\beta_1 + \frac{1}{C} \right] e^{\beta_1 t} + \alpha_2 \left[ L\beta_2^2 + (R - R_0)\beta_2 + \frac{1}{C} \right] e^{\beta_2 t} = 0$$

不失普遍性, 可设  $\beta_1 \neq \beta_2$  (因为  $\beta_1 = \beta_2$  可视为  $\beta_1 \neq \beta_2$  但  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$  的极限情形)。上式对任意的时刻  $t$  都等于零; 因而, 各指数项的系数均应等于零, 即

$$\begin{cases} L\beta_1^2 + (R - R_0)\beta_1 + \frac{1}{C} = 0, \\ L\beta_2^2 + (R - R_0)\beta_2 + \frac{1}{C} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

解得

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_+ = -\frac{R - R_0}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R - R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ \beta_2 = \beta_- = -\frac{R - R_0}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R - R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{cases} \quad (6)$$

另一种选择  $\beta_1 = \beta_-$ 、 $\beta_2 = \beta_+$  导致同样的结果。由③⑥式得

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\left(\frac{R - R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}, \quad \alpha_2 = \frac{-\beta}{2\sqrt{\left(\frac{R - R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \quad (7)$$

由②⑥⑦式得

$$i(t) = \frac{\beta}{2\sqrt{\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \left[ e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)t} - e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)t} \right] \quad (8)$$

(2) 要在左侧回路中产生谐振（即电流  $i(t)$  持续等幅振荡），须使电路的能量不随时间耗损，同时电流随时间周期性变化。因而有

$$\begin{cases} R - R_0 = 0, \\ \left(\frac{R - R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0. \end{cases} \quad (9)$$

注意，⑨式第一式直接导致⑨式第二式。所以，⑨式第一式是此电路发生谐振的条件。由⑧式和⑨式第一式得

$$i_H(t) = \beta\sqrt{LC} \frac{e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} - e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}}{2j} = \beta\sqrt{LC} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (10)$$

谐振频率为

$$f_H = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11)$$

(3) 要在左侧回路中产生 RLC 阻尼振荡（即电流  $i(t)$  振幅随时间  $t$  衰减），须使电路的能量不断随时间耗损，同时电流随时间周期性变化。因而有

$$R - R_0 > 0 \quad (12)$$

$$\left(\frac{R - R_0}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \quad (13)$$

由⑫⑬式得

$$R_0 < R < R_0 + 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14)$$

这是电路发生阻尼振荡的条件。由⑧⑭式得

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}} \frac{e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}\right)t} - e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}\right)t}}{2j} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}} e^{-\frac{R-R_0}{2L}t} \sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2} t\right] \end{aligned} \quad (15)$$

振荡频率为

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2} \quad (16)$$

(4) 若要使得隧道二极管上交流部分的平均功率最大，同时又要确保隧道二极管始终工作在负电阻区域，则须使隧道二极管上的直流偏置电压处在工作电压范围的中间位置

$$\bar{V} = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} \quad (17)$$

此时的交流部分电压可达到最大振幅

$$V_{D\max} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} \quad (18)$$

考虑到右侧回路中电压源为理想恒压电源，且理想的高频扼流圈 RFC 的直流电阻为零，由回路电势之和为零可知

$$V_0 = \bar{V} = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} \quad (19)$$

此时，隧道二极管交流部分的最大平均功率为

$$\bar{P}_{\max} = \frac{1}{2} \frac{V_{D\max}^2}{R_0} = \frac{(V_{\max} - V_{\min})^2}{8R_0} \quad (20)$$

四、(1) 设带电粒子运动的速度为  $v$ ，均匀磁场的磁感应强度为  $B$ ，由相对论粒子运动方程有

$$\frac{d\mathbf{p}_p}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{p}_p$  是质子的动量， $e$  为质子的电量。

$$\mathbf{p}_p = \frac{m_p \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

不计辐射能量损失，质子仅受到磁场作用，有

$$\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

将②式代入①式，有

$$\frac{m_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = evB \quad (4)$$

将③式代入④式得

$$B = \frac{m_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{eR} = \frac{P_p}{eR} \quad (5)$$

[解法 (二)]

不计辐射的能量损失，带电粒子的粒子动量的大小不随时间变化，有

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_p = e(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{B} = e\boldsymbol{\omega} B \mathbf{R} = e\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

式中  $\boldsymbol{\omega}$  是粒子转动的角速度，满足

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (3)$$

由①②式得

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_p = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

由题意， $\mathbf{p}_p$  和  $\mathbf{R} \times \mathbf{B}$  都与  $\boldsymbol{\omega}$  垂直，故有

$$\mathbf{p}_p = e\mathbf{R} \times \mathbf{B}$$

两边取数值即有

$$B_p = \frac{P_p}{eR} \quad (5)$$

]

Tevatron 加速器中粒子运行轨道的半径  $R$  满足

$$R \geq \frac{L_{\max}}{2\pi} \quad (6)$$

由⑤⑥式得

$$B = \frac{p_p}{eR} \geq \frac{2\pi p_p}{eL_{\max}} \quad (7)$$

由狭义相对论中粒子的能量-动量关系有

$$E_p^2 = p_p^2 c^2 + m_p^2 c^4 \quad (8)$$

于是, 将质子  $p$  加速到  $E_{p,\max}^{(\text{tevatron})} = 1.00 \times 10^6 \text{ MeV}$  所需要的最小磁感强度  $B_{\min}$  为

$$\begin{aligned} B_{\min} &= \frac{2\pi}{eL_{\max}c} \sqrt{(E_{p,\max}^{(\text{tevatron})})^2 - (m_p c^2)^2} \\ &= \frac{2\pi}{3.00 \times 10^8 \times 6436} \sqrt{(1.00 \times 10^{12})^2 - (938.3 \times 10^6)^2} \text{ T} \\ &\approx 3.26 \text{ T} \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 考虑多粒子系统洛仑兹不变质量  $M$  的平方。对于反应前 (相应的量不带撇) 实验室参考系中的粒子体系

$$M^2 \equiv \left( \frac{E_1 + m_p c^2}{c^2} \right)^2 - \left( \frac{p_1}{c} \right)^2 = 2 \frac{E_1}{c^2} m_p + 2m_p^2 \quad (10)$$

式中,  $E_1$  和  $p_1$  分别表示实验室参考系中反应前入射质子的能量和动量; 对于反应后 (相应的量带撇) 质心参考系中的粒子体系

$$M^2 \equiv E_t'^{(\text{cm})} - 0 \geq (4m_p)^2 \quad (11)$$

式中  $E_t'^{(\text{cm})}$  是反应后质心参考系中的粒子体系的总能量, 已利用质心参考系中总动量等于零的事实。

[解法 (二)]

在实验室系中, 反应前 (相应的量不带撇) 后 (相应的量带撇) 能量守恒

$$E_1 + m_p c^2 = \sqrt{(E_t'^{(\text{cm})})^2 + p_t'^2 c^2} \geq \sqrt{(4m_p c^2)^2 + p_t'^2 c^2} \quad (10)$$

式中,  $p_t'$  表示反应末态粒子的总动量; 反应前后动量守恒

$$p_1 = p_t' \quad (11)$$

]

由相对论能量-动量关系, 有

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + (m_p c^2)^2 \quad (12)$$

由⑩⑪⑫式得

$$E_1 \geq \frac{(4m_p)^2 - 2m_p^2}{2m_p} c^2 = 7m_p c^2 \approx 6568.1 \text{ MeV} \quad (13)$$

入射质子的动能为

$$E_{1k} \geq 7m_p c^2 - m_p c^2 = 6m_p c^2 \approx 5629.8 \text{ MeV} \quad (14)$$

能产生反质子时入射质子的最小动能  $E_{1k,\min} = 5629.8 \text{ MeV}$ ，相应于入射质子的最小能量  $E_{1,\min} = 6568.1 \text{ MeV}$ 。Tevatron 能加速质子的最大能量

$$E_{p,\max}^{(\text{tevatron})} = 1.00 \times 10^6 \text{ MeV} > E_{1,\min} \approx 6568.1 \text{ MeV} \quad (15)$$

即 Tevatron 可以通过加速质子轰击静止的靶质子而产生反质子。

五、(1) 光信号从飞行器甲发出到返回甲，从惯性系  $\Sigma$  中的观测者来看，所需时间为

$$(\Delta t_{\text{光信号}})_{\Sigma} = \frac{(\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{甲}\Sigma}^2}{c^2}}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} (\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} T \quad (1)$$

根据狭义相对论速度合成法则，飞行器甲相对于飞行器乙的速度为

$$v_{\text{甲乙}} = \frac{v_{\text{甲}\Sigma} + v_{\Sigma\text{乙}}}{1 + \frac{v_{\text{甲}\Sigma} v_{\Sigma\text{乙}}}{c^2}} = \frac{v_{\text{甲}\Sigma} + (-v_{\Sigma\text{乙}})}{1 + \frac{v_{\text{甲}\Sigma} (-v_{\Sigma\text{乙}})}{c^2}} = \frac{-\frac{2c}{3} + \frac{c}{3}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{c}{3}}{1 - \frac{2}{9}} = -\frac{3}{7}c \quad (2)$$

式中，最后的等号右边的负号表示飞行器甲相对于乙的速度沿  $y$  轴负方向，余类推。从飞行器乙上的观测者来看，光信号从飞行器甲发出到返回甲所需时间为

$$(\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{乙}} = \frac{(\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{甲乙}}^2}{c^2}}} = \frac{7\sqrt{10}}{20} (\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}} = \frac{7\sqrt{10}}{20} T \quad (3)$$

从飞行器甲上的观测者来看，飞行器甲收到返回的光信号时，飞行器甲和乙间的距离为

$$l = \frac{1}{2} (c(\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}} - |v_{\text{乙甲}}|(\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}}) = \frac{2}{7} c(\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}} = \frac{2}{7} cT \quad (4)$$

从甲收到返回的光信号到甲追上乙所需的时间为

$$(\Delta t_{\text{光信号}}) = \frac{l}{|v_{\text{乙甲}}|} = \frac{2}{3} (\Delta t_{\text{光信号}})_{\text{甲}} = \frac{2}{3} T \quad (5)$$

(2) 考虑小货物在惯性系  $\Sigma$  中的速度。为了让小货物能被飞行器丙收到，小货物速度的  $y$  分量应该与飞行器丙相同，即

$$(v_{\text{货}\Sigma})_y = v_{\text{丙}\Sigma} = \frac{2}{3}c \quad (6)$$

据题意，小货物在惯性系  $\Sigma$  中的速度大小为  $v_{\text{货}\Sigma} = 3c/4$ 。小货物速度的  $x$  分量为

$$(v_{\text{货}\Sigma})_x = \sqrt{v_{\text{货}\Sigma}^2 - (v_{\text{货}\Sigma})_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}c\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{12}c \quad (7)$$

由题意，这里取正号。

惯性系  $\Sigma$  相对于飞行器甲的速度为

$$(v_{\Sigma\text{甲}})_x = 0, (v_{\Sigma\text{甲}})_y = -(v_{\text{甲}\Sigma})_y = \frac{2}{3}c \quad (8)$$

根据狭义相对论速度合成法则，从飞行器甲上的观察者来看，小货物速度的两个分量分别为

$$(v_{\text{货甲}})_x = \frac{(v_{\text{货}\Sigma})_x \sqrt{1 - \frac{v_{\Sigma\text{甲}}^2}{c^2}}}{1 + \frac{(v_{\text{货}\Sigma})_y v_{\Sigma\text{甲}}}{c^2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{12} c \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{85}}{52} c \quad (9)$$

$$(v_{\text{货甲}})_y = \frac{(v_{\text{货}\Sigma})_y + v_{\Sigma\text{甲}}}{1 + \frac{(v_{\text{货}\Sigma})_y v_{\Sigma\text{甲}}}{c^2}} = \frac{\frac{2}{3} c + \frac{2}{3} c}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{12}{13} c \quad (10)$$

已利用了⑥⑦⑧式。从飞行器甲上的观测者来看，小货物发射速度的大小为

$$v_{\text{货甲}} = \sqrt{(v_{\text{货甲}})_x^2 + (v_{\text{货甲}})_y^2} = \frac{\sqrt{2389}}{52} c \quad (11)$$

发射方向与飞行器甲的运动方向之间的夹角  $\theta$  为

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{(v_{\text{货甲}})_y}{(v_{\text{货甲}})_x} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{48}{\sqrt{85}} = 2.95 \text{rad} = 169^\circ \quad (12)$$

回到参考系  $\Sigma$ ，货物从发送到接收所用的时间为

$$(\Delta t_{\text{货}})_\Sigma = \frac{d}{(u_{\text{货}\Sigma})_x} = \frac{12d}{\sqrt{17}c} \quad (13)$$

货物在  $y$  方向上的位移为

$$(\Delta y_{\text{货}})_\Sigma = (v_{\text{货}\Sigma})_y (\Delta t_{\text{货}})_\Sigma = \frac{2}{3} c \times \frac{12d}{\sqrt{17}c} = \frac{8}{\sqrt{17}} d \quad (14)$$

从飞行器乙上的观测者来看，设货物从发送到接收的时间为  $(\Delta t_{\text{货}})_{\text{乙}}$ ，由洛伦兹变换公式得

$$(\Delta t_{\text{货}})_{\text{乙}} = \frac{(\Delta t_{\text{货}})_\Sigma - \frac{v_{\Sigma\text{乙}}}{c^2} (\Delta y_{\text{货}})_\Sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\Sigma\text{乙}}}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{12d}{\sqrt{17}c} - \frac{1}{c^2} \left(-\frac{c}{3}\right) \left(\frac{8d}{\sqrt{17}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{11\sqrt{34}}{17} \frac{d}{c} \quad (15)$$

六、(1) 设光在光纤端口以角度  $i$  入射到内层介质，折射角为  $i'$ ，进而以入射角  $i''$  入射到内外层分界面上，如解题图 6a 所示。由折射定律得

$$n_0 \sin i = n_1 \sin i' \quad (1)$$

为了使光能在光纤内传输（全反射），应有

$$i'' \geq i_c \quad (2)$$

式中， $i_c$  是内层介质（相对于外层介质）的全反射的临界角，它满足

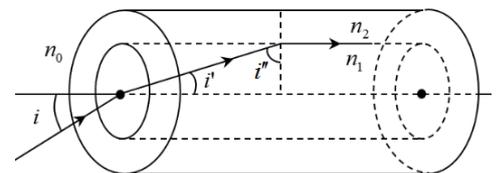
$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

由几何关系有

$$i' + i'' = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

由①②③④式得

$$n_0 \sin i = n_1 \cos i'' \leq n_1 \cos i_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



解题图 6a

即

$$i \leq \arcsin \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} \quad (5)$$

(2) 当圆环形陀螺仪沿逆时针方向以角速度  $\Omega$  转动时, 其环路切向线速率为  $\Omega R$ , 由狭义相对论速度变换公式知, 沿逆时针和顺时针方向传播的光相对实验室参照系的线速率分别为

$$v_{\text{ccw}} = \frac{\frac{c}{n_1} + \Omega R}{1 + \frac{\frac{c}{n_1} \Omega R}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n_1} + \Omega R}{1 + \frac{\Omega R}{n_1 c}} = \frac{c^2 + n_1 \Omega R c}{n_1 c + \Omega R} \quad (6)$$

$$v_{\text{cw}} = \frac{\frac{c}{n_1} - \Omega R}{1 - \frac{\frac{c}{n_1} \Omega R}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n_1} - \Omega R}{1 - \frac{\Omega R}{n_1 c}} = \frac{c^2 - n_1 \Omega R c}{n_1 c - \Omega R} \quad (7)$$

式中,  $n_1$  为光传播所通过的介质的折射率。设沿逆时针和顺时针方向传播的光绕行  $N$  周回到出发点所需要的时间为  $t_{\text{ccw}}$  和  $t_{\text{cw}}$ , 它们分别由以下方程决定

$$v_{\text{ccw}} t_{\text{ccw}} = N 2\pi R + \Omega R t_{\text{ccw}} \quad (8)$$

$$v_{\text{cw}} t_{\text{cw}} = N 2\pi R - \Omega R t_{\text{cw}} \quad (9)$$

由⑧⑨式得

$$t_{\text{ccw}} = \frac{N 2\pi R}{v_{\text{ccw}} - \Omega R} = \frac{N 2\pi R (n_1 c + \Omega R)}{c^2 - (\Omega R)^2} \quad (10)$$

$$t_{\text{cw}} = \frac{N 2\pi R}{v_{\text{cw}} + \Omega R} = \frac{N 2\pi R (n_1 c - \Omega R)}{c^2 - (\Omega R)^2} \quad (11)$$

沿逆时针和顺时针方向传播的这两束光的相差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c}{\lambda_0} (t_{\text{ccw}} - t_{\text{cw}}) = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{N 4\pi R^2 \Omega}{c^2 - (\Omega R)^2} \quad (12)$$

从⑫式可看出, 相差  $\Delta\phi$  与介质的折射率  $n_1$  无关。

(3) 在旋转的环形腔中, 存在沿逆时针方向和顺时针方向传播的共振模式。沿顺时针和逆时针方向传播的共振光波的波长满足以下条件 (用  $m$  表示谐振波的级次)

$$L_{\text{cw}} = m \lambda_{\text{cw}} \quad (13)$$

$$L_{\text{ccw}} = m \lambda_{\text{ccw}} \quad (14)$$

这里,  $L_{\text{cw}}$ 、 $L_{\text{ccw}}$  分别表示在环形腔旋转的情况下沿顺时针和逆时针方向传播的两共振光波的波前从分束器 A 发出又回到 A 所经过的路程, 即

$$L_{\text{cw}} = v_{\text{cw}} t_{\text{cw}} \quad (15)$$

$$L_{\text{ccw}} = v_{\text{ccw}} t_{\text{ccw}} \quad (16)$$

由⑥⑦⑧⑨⑩⑪式, 并 (由题意) 取  $N=1$  及  $n_1=n$ , 可得

$$v_{\text{CW}} t_{\text{CW}} = \frac{2\pi R(c^2 - n\Omega R c)}{c^2 - (\Omega R)^2} \quad (17)$$

$$v_{\text{CCW}} t_{\text{CCW}} = \frac{2\pi R(c^2 + n\Omega R c)}{c^2 - (\Omega R)^2} \quad (18)$$

由(13)(14)(15)(16)(17)(18)式得，沿顺时针和逆时针方向传播的同一级次（ $m$  相同）的两个共振模式之间的频率差为

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{\text{CW}} - f_{\text{CCW}} = \frac{c}{n} \left( \frac{1}{\lambda_{\text{CW}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{CCW}}} \right) = \frac{mc}{n} \left( \frac{1}{L_{\text{CW}}} - \frac{1}{L_{\text{CCW}}} \right) \\ &= \frac{m\Omega}{\pi} \frac{c^2 - (\Omega R)^2}{c^2 - (n\Omega R)^2} \approx \frac{m\Omega}{\pi} \quad \left( \text{或} \frac{2R\Omega}{\lambda_{m0}} \right) \end{aligned}$$

即

$$\Omega = \frac{\pi}{m} \Delta f \quad \left( \text{或} = \frac{\lambda_{m0}}{2R} \Delta f \right) \quad (19)$$

七、(1) 描述转动体系辐射的三个物理量可选为系统的转动惯量  $I$ 、转动角速度  $\omega$  和辐射引力波的传播速度  $c$ 。引力波辐射功率的表达式可表示为

$$P = \alpha G I^\lambda \omega^\xi c^\sigma \quad (1)$$

式中  $\alpha$  是无量纲的比例系数， $\lambda$ 、 $\xi$ 、 $\sigma$  是待定幂次。比较(1)式两边物理量的量纲，有

$$[P] = ML^2 T^{-3} = M^{\lambda-1} L^{2\lambda+\sigma+3} T^{-\xi-\sigma-2} \quad (2)$$

由(2)式得

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 1 \\ 2\lambda + \sigma + 3 = 2 \\ \xi + \sigma + 2 = 3 \end{cases} \quad (3)$$

由方程组(3)解得

$$\lambda = 2, \quad \xi = 6, \quad \sigma = -5 \quad (4)$$

将(4)式代入(1)式得

$$P = \frac{\alpha G I^2 \omega^6}{c^5} \quad (5)$$

(2) 两黑洞绕系统质心做近似圆周运动，设质量为  $M$  和  $m$  的两黑洞相距  $L$ ，到系统质心的距离分别为  $R$  和  $r$ ，由牛顿引力定律有

$$G \frac{Mm}{L^2} = m\omega^2 r \quad (6)$$

$$G \frac{Mm}{L^2} = M\omega^2 R \quad (7)$$

由(6)(7)式得

$$\omega^2 = \frac{G(M+m)}{L^3} \quad (8)$$

系统总能量为

$$E = -\frac{GMm}{2L} = -\frac{G^{2/3} Mm}{2(M+m)^{1/3}} \omega^{2/3} \quad (9)$$

由(9)式得，引力波辐射功率  $P$  满足

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{G^{2/3}Mm}{3(M+m)^{1/3}}\omega^{-1/3}\frac{d\omega}{dt} \quad (10)$$

系统对其质心的转动惯量为

$$I = \frac{Mm}{M+m}L^2 \quad (11)$$

由⑤⑧⑪式得

$$P = \frac{\alpha G^{7/3}\omega^{10/3}}{c^5} \frac{M^2 m^2}{(M+m)^{2/3}} \quad (12)$$

比较⑩⑫式得

$$\omega^{-11/3}\frac{d\omega}{dt} = \frac{3\alpha G^{5/3}}{c^5} \frac{Mm}{(M+m)^{1/3}}$$

对上式两边积分

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega'^{-11/3} d\omega' = \int_0^t \frac{3\alpha G^{5/3}}{c^5} \frac{Mm}{(M+m)^{1/3}} dt' \quad (13)$$

可得

$$\omega = \left[ \omega_0^{-8/3} - \frac{8\alpha G^{5/3}}{c^5} \frac{Mmt}{(M+m)^{1/3}} \right]^{-3/8} \quad (14)$$

对  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  积分，并利用⑭式得

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \int_0^t \omega' dt' \\ &= \theta_0 + \frac{c^5(M+m)^{1/3}\omega_0^{-5/3}}{5\alpha G^{5/3}Mm} - \frac{c^5(M+m)^{1/3}}{5\alpha G^{5/3}Mm} \left[ \omega_0^{-8/3} - \frac{8\alpha G^{5/3}}{c^5} \frac{Mmt}{(M+m)^{1/3}} \right]^{-5/8} \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $\theta_0 = \theta(t=0)$ 。两黑洞从  $t=0$  时刻开始绕质心旋转一圈

$$\theta = \theta_0 + 2\pi$$

将上式代入⑮式，并利用⑧式消去  $\omega_0$ ，得

$$t = \frac{c^5 L_0^4}{8\alpha G^3 Mm(M+m)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{10G^{5/2}Mm\pi\alpha\sqrt{M+m}}{c^5 L_0^{5/2}} \right)^{8/5} \right] \quad (16)$$

(3) 由⑧⑭式得

$$L = G^{1/3}(M+m)^{1/3} \left[ \omega_0^{-8/3} - \frac{8\alpha G^{5/3}}{c^5} \frac{Mmt}{(M+m)^{1/3}} \right]^{1/4} \quad (17)$$

当  $L = \frac{1}{2}L_0$  时，由⑧⑰式得

$$t = \frac{15c^5 L_0^4}{128\alpha G^3 Mm(M+m)} \quad (18)$$

由⑮⑱式得，相应的旋转度数为

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)c^5 L_0^{5/2}}{5\alpha G^{5/2}Mm\sqrt{M+m}} \frac{180^\circ}{\pi} \quad (19)$$

八、(1) 当一束线偏振光沿  $x_3$  轴进入晶体，且沿  $x_1$  方向偏振时，进入晶体后可以分解为沿  $x'_1$  和  $x'_2$  方向的两个垂直偏振分量。据题给的折射率与电场强度的关系，相应的相位变化量为

$$\phi_{n_{x'_1}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{x'_1} l = \frac{2\pi l}{\lambda_0} (n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \gamma E) \quad (1)$$

$$\phi_{n_{x'_2}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{x'_2} l = \frac{2\pi l}{\lambda_0} (n_o + \frac{1}{2} n_o^3 \gamma E) \quad (2)$$

这两束光穿过晶体后的相位差为

$$\Delta\phi = \phi_{n_{x'_2}} - \phi_{n_{x'_1}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} l n_o^3 \gamma E = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o^3 \gamma V \quad (3)$$

式中  $V = El$ 。入射光强为

$$I_i = k |\mathbf{E}|^2 = k (|\mathbf{E}_{x'_1}|^2 + |\mathbf{E}_{x'_2}|^2) = 2kE_0^2 \quad (4)$$

式中  $k$  是与电场强度无关的常量。当光通过长度为  $l$  的晶体后，在输出面的  $x'_1$  与  $x'_2$  方向上的电场为

$$\begin{cases} E_{x'_1}(l) = E_0 \cos(\omega t + \phi_{n_{x'_1}}) \\ E_{x'_2}(l) = E_0 \cos(\omega t + \phi_{n_{x'_2}}) \end{cases} \quad (5)$$

出射光强为

$$I_f = k |\mathbf{E}(l)|^2 = k (|E_{x'_1}(l)|^2 + |E_{x'_2}(l)|^2) = 2kE_0^2 = I_i \quad (6)$$

可见，当光通过长度为  $l$  的晶体后，光强未变。

由半波电压  $V_\pi$  的定义有

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o^3 \gamma V_\pi = \pi \quad (7)$$

由⑦式得

$$V_\pi = \frac{\lambda_0}{2n_o^3 \gamma} \quad (8)$$

(2) 不经过 1/4 波片，从  $P_2$  射出的光场强度为  $x'_1$  与  $x'_2$  的  $x_2$  分量之和

$$\begin{aligned} E_{x_2} &= -E_{x'_1}(l) \cos 45^\circ + E_{x'_2}(l) \cos 45^\circ \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} [-\cos(\omega_0 t + \phi_{n_{x'_1}}) + \cos(\omega_0 t + \phi_{n_{x'_2}})] \\ &= -\frac{2E_0}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \sin\left(\omega_0 t + \frac{\phi_{n_{x'_2}} + \phi_{n_{x'_1}}}{2}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

输出光强为

$$I_f = k \left( \frac{2E_0}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Delta\phi}{2} \right)^2 = 2kE_0^2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad (10)$$

由③④⑧⑩式得，当  $\frac{\pi V_m}{2V_\pi} \ll 1$ ，光强的透过率为

$$T \equiv \frac{I_f}{I_i} = \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi V}{2V_\pi}\right) = \sin^2 \frac{\pi(V_m \sin \omega_m t)}{2V_\pi} \approx \left[ \frac{\pi(V_m \sin \omega_m t)}{2V_\pi} \right]^2 \quad (11)$$

$T$  与  $V^2 = (V_m \sin \omega_m t)^2$  成正比。

加上 1/4 波片， $x'_1$  与  $x'_2$  传输的光波分量之间有一个固定的  $\pi/2$  相位差，由⑪式有

$$\begin{aligned} T &= \sin^2 \frac{\Delta\varphi + \frac{\pi}{2}}{2} = \sin^2 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2V_\pi} (V_m \sin \omega_m t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \cos[2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi V_m \sin \omega_m t}{2V_\pi})]\} = \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{\pi V_m \sin \omega_m t}{V_\pi}) \\ &\approx \frac{1}{2} (1 + \frac{\pi}{V_\pi} V_m \sin \omega_m t) \end{aligned} \quad (12)$$

$T$  与  $V = V_m \sin \omega_m t$  成线性关系。

可见，未加 1/4 波片时，光强的透过率与调制电压信号  $V = V_m \sin \omega_m t$  呈非线性关系；添加 1/4 波片的作用是保证系统的工作电压处于线性工作区域，使得光强的透过率和调制电压信号  $V = V_m \sin \omega_m t$  呈现线性关系。

(3) 实际加载至电光晶体上的电压  $V_c$  为

$$V_c = \frac{\left( \frac{1}{1/R + i\omega_m C} \right)}{R_m + \frac{1}{1/R + i\omega_m C}} V \quad (13)$$

由⑬式得， $V_c$  的模为

$$|V_c| = \frac{R}{\sqrt{(R_m + R)^2 + R_m^2 R^2 C^2 \omega_m^2}} |V| \approx \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 R_m^2 \omega_m^2}} |V| \quad (14)$$

当  $\omega_m \gg (R_m C)^{-1}$  时，

$$|V_c| \ll |V|$$

电压基本上落在  $R_m$  上，电光晶体调制效率极低。

(4) 并联电感  $L$  和分流电阻  $R_L$ （即将图 8b 中的开关都闭合）后，调制器系统的有效阻抗满足

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{i\omega_m L} + \frac{1}{-i/(\omega_m C)} = \frac{1}{R_L} - i \left( \frac{1}{\omega_m L} - \omega_m C \right) \quad (15)$$

由⑮式得

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_L^2} + \left( \omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} \right)^2}} \quad (16)$$

由⑯式可知，当  $\omega_m = 1/\sqrt{LC}$ ，调制器阻抗为最大值

$$Z_{\max} = R_L \quad (17)$$

因此，可通过调节电感来使得调制器阻抗达到最大值。特别的，当  $R_L \gg R_m$  时有

$$|V_c| \approx |V| \quad (18)$$

调制电压绝大部分加在在晶体上，从而保证了调制效率。