第37届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

一、我国大科学装置散裂中子源于2018年建成并投入使用，它在诸多领域有广泛的应用。历史上，查德威克在1932年首次确认了中子的存在并测出了它的质量；哈恩等人在1939年发现用中子轰击铀原子核可使其分裂，同时放出中子，引发链式反应。为了使链式反应能够持续可控地进行，可通过弹性碰撞使铀核放出的中子慢化。不考虑相对论效应。

（1）查德威克用中子（质量为m）轰击质量为m_1的静止靶核（氢核H或氮核$^{14}\mathrm{N}$，质量为m_H或$14m_\mathrm{H}$），观察它们的运动。设靶核的出射动量与入射中子的初动量之间的夹角为α，试导出此时靶核的出射速率v_1和中子的末速率v分别与中子初速率v_0之间的关系。该实验测得氢核的最大出射速率为$3.30\times10^7\ \mathrm{m/s}$，氮核的最大出射速率为$4.70\times10^6\ \mathrm{m/s}$，求$m$和$v_0$的值。

（2）在上述实验中一个氮核也可能受到一束中子的连续撞击。假设氮核开始时是静止的，每次与之相碰的中子的速率都是v_0，碰撞都使得氮核速率的增量最大。试计算经过多少次碰撞后氮核的动能与中子的初动能近似相等？

（3）设经过多次碰撞被减速的中子处于热平衡状态，其速率满足麦克斯韦分布

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}v^2\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}},$$

这里k_B为玻尔兹曼常量，T为系统的绝对温度。试计算在热平衡时，中子的最概然速率所对应的动能和最概然动能。

二、当电场中两个导体球靠近时，导体球之间的电场将明显增强。本题试探讨这一现象。已知真空介电常量为ε_0。

（1）设一个半径为R_0的孤立导体球的球心与一个静止点电荷Q相距为a（$a>R_0$），求镜像电荷的电量及其位置。

（2）设导体球置于大小为E_0的匀强外电场中，该外加电场可看作是由两个相距很远的等量异号点电荷$\pm Q$在其连线中点处产生的。试证导体球的感应电荷的作用等效于两个镜像电荷形成的电偶极子，并求该电偶极子的偶极矩与外场E_0之间的关系。

（3）设导体球外两等量异号点电荷$\pm q$的间距为Δl，它们形成的电偶极子$q\Delta\boldsymbol{l}$沿径向放置在半径为R_0的导体球附近，偶极子中心与导体球中心相距r（$r>>\Delta l$），求该偶极子在导体球中镜像电偶极矩的大小。

（4）在大小为E_0的匀强外电场中，沿外电场方向放置两个半径为R_0的导体球，两球心相距r（$r>2R_0$）。求导体球外过两球心的平面内任一点$\mathrm{P}'(x,y)$处的电势分布和在两球心连线方向的场强分布（可用递推式表示），取两球心连线中点为坐标原点，连线方向为X轴。

（5）试证：在不考虑击穿放电的情形下，当上述两导体缓慢无限靠近时，两球连心线中点

的电场会因静电感应而趋于无限大。

三、量子热机是利用量子物质作为工作物质进行循环的热机。下面以二能级原子系统为例描述量子热机的工作原理。二能级原子的平均能量定义为

$$\langle E\rangle = p_0\cdot E_0 + p_1\cdot E_1,$$

其中E_0、p_0和E_1、p_1分别表示原子处于基态和激发态的能量、概率。为简单起见，假设$E_0=0$，在循环过程中激发态与基态的能量差是一个可调参量。该原子处于能量为E的能态的概率满足玻尔兹曼分布

$$p\propto \mathrm{e}^{-E/(k_\mathrm{B}T)},$$

其中T为热力学温度，k_B为玻尔兹曼常量。在准静态过程中，平均能量的变化为

$$\mathrm{d}\langle E\rangle = p_1\mathrm{d}E_1 + E_1\mathrm{d}p_1,$$

其中$p_1\mathrm{d}E_1$为能级变化引起的能量变化，对应外界对二能级原子系统所做的功$đW$；$E_1\mathrm{d}p_1$为概率变化引起的能量变化，对应外界对二能级原子系统的传热$đQ$。

（1）将二能级原子系统与一个温度为T的热源接触，求热平衡时二能级原子系统处在基态的概率p_0和激发态的概率p_1。

（2）经典奥托循环的P-V图如图2a所示，其中A→B和C→D是等容过程，B→C和D→A是绝热过程。试画出量子奥托循环过程中二能级的能量差E_1与激发态概率p_1的关系示意图，并计算量子奥托循环四个过程中的传热、内能增量和对外做功。

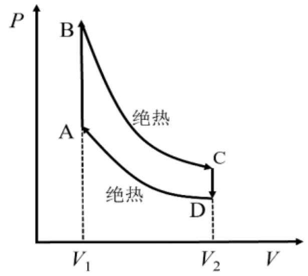

图 2a

（3）类似地，计算量子卡诺循环各个过程中的传热、内能增量和对外做功。假设量子卡诺循环中高温热源温度T_h和低温热源温度T_l分别与量子奥托循环的最高温度和最低温度相同，试比较量子奥托热机和量子卡诺热机的工作效率。

四、自1964年Yeh和Cummins观察到水流中粒子的散射光多普勒频移至今，激光多普勒测速技术已获得了广泛应用。为了得到足够的散射光强，通常在流体中散播尺寸和浓度适当的示踪散射粒子，激光照射到运动粒子上时发生散射，从而获得粒子（和流体）的速度信息。设粒子速度$\boldsymbol{v}$与竖直方向的夹角为β。

（1）如图4a所示，一束频率为f的光被流体中的运动粒子所散射。光在流体中的传播速率为c/n（n为流体的折射率），粒子以速度$\boldsymbol{v}$运动（$v<<c/n$）。入射光和观测到的散射光的传播方向与粒子速度的夹角分别为θ_1和θ_2。求散射光相对于入射光的频移量Δf与散射光方向的关系。设粒子的速率$v=1\ \mathrm{m/s}$，光的频率$f=10^{14}\mathrm{Hz}$，Δf能否可以直接用分辨率为5MHz的光谱仪进行检测？

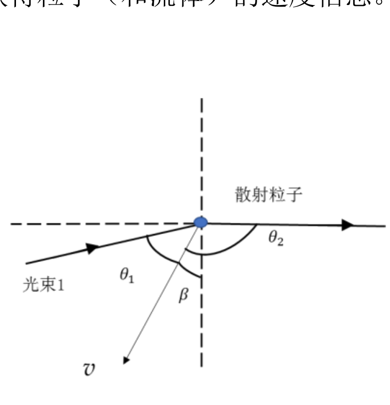

图 4a

（2）如图 4b 所示，用频率为 f 的两束相干平行光（其传播方向在同一竖直平面内）照射流体中同一粒子，两束光与水平面的夹角均为 $\alpha/2$（α 比较小）。两束光的散射光到达光电探测器的相位分别为 ϕ_1 和 ϕ_2，散射光的电场矢量方向近似相同且振幅均为 E_0。光电探测器输出的电流强度正比于它接收到的光强，比例常量为 k。假设光电探测器的频率响应范围为 $10^2 \sim 10^7\,\mathrm{Hz}$，求光电探测器的输出电流表达式。为简单起见，假设粒子速度处于照射在粒子上的两束入射光所在平面内。

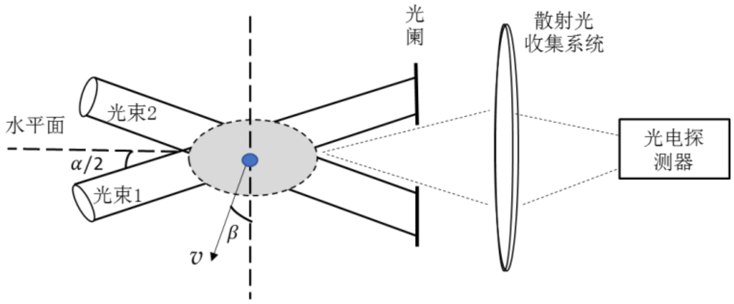

图 4b

（3）设 XOZ 平面内两束相干平行光相对于 X 轴对称入射到达相交区域（见图 4c），求干涉条纹间距；粒子（其速度在 XOZ 平面内）经过明暗相间的干涉条纹区将散射出光脉冲，求光脉冲的频率。

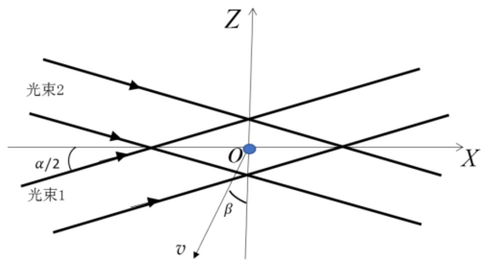

图 4c

五、在恒星之间的广阔宇宙空间中存在星际介质。在宇宙射线的作用下，星际介质中的分子失去部分电子成为正离子，电子则游离在外，成为等离子态。脉冲星是高速旋转、具有超强磁场的中子星，地球上所观测到其发出的电磁辐射是脉冲信号。脉冲星信号可用于星际导航和高精度计时，为此需要获得脉冲信号到达地球的精确时间，研究其电磁辐射的相位变化与色散。

一脉冲星到地球的距离为 d，星际介质中的电子平均数密度为 n_{e}（数量级为 $10^4\ \mathrm{m}^{-3}$）；假设介质中存在匀强静磁场 B（数量级为 $10^{-10}\ \mathrm{T}$），其方向平行于电磁波的传播方向。已知电子质量为 m_{e}，电荷为 $-e$（$e>0$），真空介电常量为 ε_0，真空中光速为 c。

（1）取该脉冲星到地球的电磁辐射方向为 z 轴正向，对于频率为 f 的电磁波，其电场为 $E_x = E_0\cos(kz - 2\pi ft)$，$E_y = E_0\cos(kz - 2\pi ft \pm \dfrac{\pi}{2})$，式中 E_0 和 k 分别为电磁波的振幅和波数。为简单起见，设 E_0 为常量、且电磁波本身的磁场对电子的作用可忽略，求电子运动的回旋半径 R_{e}。

（2）脉冲星信号在星际介质中传播时会发生色散，其传播速度大小（群速度的大小 v_{g}）依赖于电磁波频率相对于波数的变化率：$v_{\mathrm{g}} = 2\pi \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k}$。求能通过介质到达地球的脉冲星信号电磁波的最低频率 f_{c}。

（3）假设在脉冲星信号的传播路径上，星际介质中的电子平均数密度 n_{e} 保持不变，问脉冲星信号中频率为 f 的电磁波到达地球的时间比其在真空中传播的时间延迟了多少？

（4）观测发现，从脉冲星同时出发的频率为 f 的电磁波到达地球时出现了相位差，求该相位差（可取近似：$\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}} << f, \frac{eB}{2\pi m_e} << f$）。

（5） 如果在传播途中长度为 a 的区间内电子数密度出现涨落 Δn_e，求脉冲星信号中频率为 f 的电磁波通过该区间后由电子数密度涨落引起的相位移动。

六、反粒子最早由狄拉克的理论所预言。1932 年，安德森研究宇宙射线时发现了电子的反粒子——正电子。此后，人类又陆续发现了反质子等反粒子。

用单粒子能量为 6.8 GeV 的高能质子束轰击静止的质子靶，可产生反质子，其反应式为

$$\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\mathrm{p}+\mathrm{p}+\underbrace{\mathrm{p}+\bar{\mathrm{p}}}_{\to\ \pi^-+\cdots}$$

质子和反质子湮灭时可产生 π^- 介子，因此在反质子束流中还伴随有大量 π^- 介子。图 6a 是探测反质子的实验装置原理图。反质子 $\bar{\mathrm{p}}$ 和 π^- 介子流依次通过闪烁计数器 S_1、S_2 和 S_3， S_1 与 S_2 相距 $l=12\mathrm{m}$，在 S_2 和 S_3 之间放置有切伦科夫计数器 C_1 和 C_2。切伦科夫计数器通过探测切伦科夫辐射（带电粒子在介质中的运动速度超过介质中光速时所激发的电磁辐射）而确定带电粒子的运动速度。C_1 仅记录速度较快的 π^- 介子，C_2 仅记录速度较慢的反质子。实验中 S_3 的作用是检验前面的计数结果是否真实。

（1）在上述反应中，假设末态质子和反质子速度近似相同，求反质子从 S_1 运动到 S_2 所需的时间 $t_{\bar{\mathrm{p}}}$。若 π^- 介子与反质子动能相同，求 π^- 介子从 S_1 运动到 S_2 所需的时间 t_{π^-}。

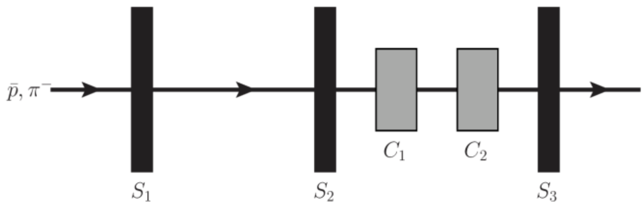

图 6a

（2）运动速率为 v（$v>c/n$）的带电粒子通过折射率为 n 的介质，求所产生的切伦科夫辐射传播方向与带电粒子的运动方向的夹角 θ。

（3）微分式切伦科夫计数器可以记录速率在某一个区间的粒子数。图 6b 是其关于轴线（图中虚线）旋转对称的原理剖面图。光收集系统包括半径为 R 的球面镜和半径可调的环状光阑。当切伦科夫辐射传播方向与带电粒子运动方向的夹角 θ 很小时，球面镜将带电粒子激发的切伦科夫辐射会聚在其焦平面上，形成半径为 r 的辐射光环，投射在计数器上。对于速率为 v 的带电粒子激发的辐射，求光环的半径。

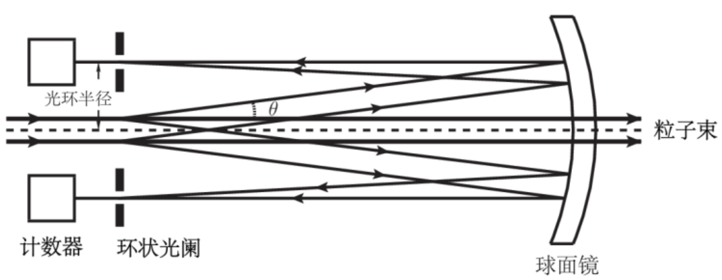

图 6b

（4）反质子与质子相遇会发生湮灭反应 $\mathrm{p}+\bar{\mathrm{p}}\to 3\pi^0$。反应末态粒子的总动能与反应初态粒子的总动能之差即为反应能 Q。为简单起见，假设质子和反质子的动能可忽略。末态三个 π^0 介子的总动能是一个常量，可用 Dalitz 图表示总动能在三个 π^0 介子之间的分配。如图 6c 所示，Dalitz 图是一个高为 1 的等边三角形，P 点到三边的距离等于三个 π^0 介子的动能占反应能的比率，即 $d_i = E_{k,i}/Q$，$E_{k,i}$ 表示第 i 个 π^0 介子的动能，$i=1,2,3$。以底边为 X 轴，底边中点为原点，底边上的中垂线为 Y 轴建立坐标系。求 P 点可能的分布范围边界的表达式，用反应能 Q、π^0 介子质量 m_{π^0} 和真空中的光速 c 表示。并讨论若 $m_{\pi^0}=0$ 时，P 点的分布范围边界的表达式。

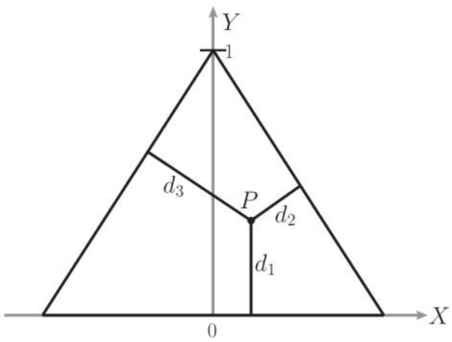

图 6c

已知：真空中的光速 $c=2.998\times10^8\,\mathrm{m/s}$，质子质量 $M_{\mathrm{p}}=938.2720\ \mathrm{MeV}/c^2$，中性 π 介子质量 $m_{\pi^0}=134.9766\ \mathrm{MeV}/c^2$，带电 $\pi^\pm$ 介子质量 $m_{\pi^\pm}=139.5702\ \mathrm{MeV}/c^2$。

七、据《荀子·宥坐篇》记载，孔子观于鲁桓公之庙，有欹（qī）器焉。欹器者，“虚则欹，中则正，满则覆。”悬挂式欹器实物如图 7a 所示：欹器空时，器身倾斜；注水适中，器身正立；注水过满，器身倾覆。图 7b 为悬挂式欹器的正视剖面图。整个欹器的外轮廓是相对于 Z 轴的回转面，Z' 轴为内部镗腔的对称轴，容器内壁与外壁的半球壳半径分别为 $R_1=R$ 和 $R_2=\sqrt{3}R$，两半球的球心 O 和 O' 均位于 X 轴上。Z' 轴和 Z 轴相距 $t=3R/10$，欹器圆柱部分的长度 $l=2R$。欹器的一对悬挂点所在直线与 XOZ 平面交于 Q 点，其坐标为 $(x_Q=-R/10,\ z_Q=2\sqrt{3}R/11)$。欹器材质均匀，其密度 ρ_1 为水的密度 ρ_2 的 3 倍。不计摩擦。

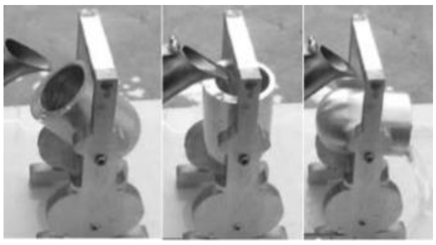
图 7a

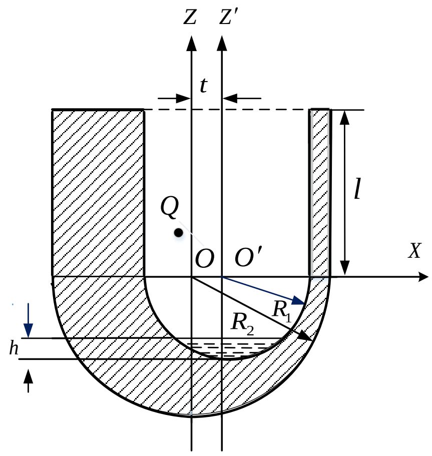

图 7b

（1）求空欹器自由悬挂平衡时 Z 轴与竖直方向的夹角。

（2）求空欹器绕一对悬挂点所在轴的转动惯量及其在平衡位置附近微振动的角频率（已知密度为 ρ、半径为 R 的匀质球体绕过其质心的轴的转动惯量为 $I_1=\dfrac{8}{15}\pi\rho R^5$；半径为 R、长度为 L 的匀质圆柱体绕过其质心且平行于圆柱底面的轴的转动惯量为 $I_2=\dfrac{\pi\rho R^2L(3R^2+L^2)}{12}$）。

（3）让空欹器自由悬挂，并开始往欹器内缓慢注水，问欹器内水面到底部的距离 h 为多少时器身正立？

（4）简述欹器“满则覆”的临界条件。