

第 37 届全国中学生物理竞赛决赛试题参考答案

一、(1) 中子以初速度与静止的靶核发生碰撞，碰撞前瞬间初速度方向与两球球心连线之间的夹角为 α 。在两球心连线和中子初速度方向所决定的平面上，令 x 轴沿两球心连线，中子初速度垂直于连线的方向为 y 轴。设碰撞后中子的速率为 v ，沿着 x 轴方向的速度分量为 v_x ， y 轴方向的速度分量为 v_y ，碰撞后靶核速率为 v_1 ，碰撞前后沿 x 轴和 y 轴方向的动量分别守恒

$$\begin{cases} mv_0 \cos \alpha = mv_x + m_1 v_1, \\ mv_0 \sin \alpha = mv_y. \end{cases} \quad (1)$$

式中

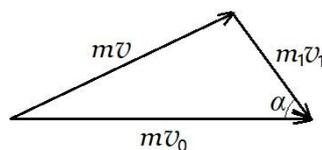
$$v_x^2 + v_y^2 = v^2$$

[

解法(二)

由碰撞前后动量守恒，碰前中子的动量 $m\boldsymbol{v}_0$ 、碰后中子的动量 $m\boldsymbol{v}$ 和碰后原子核的动量 $m_1\boldsymbol{v}_1$ 构成一闭合的矢量三角形，如解题图 1a 所示。据余弦定理有

$$m^2 v_0^2 + m_1^2 v_1^2 - 2mm_1 v_0 v_1 \cos \alpha = m^2 v^2 \quad (1)$$



解题图 1a

式中， α 是碰前中子的动量与碰后原子核的动量之间的夹角。

]

能量守恒给出

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (2)$$

由①②式得

$$m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2}{m} v_1^2 - 2m_1 v_0 v_1 \cos \alpha = 0,$$

由此得

$$v_1 = \frac{2m \cos \alpha}{m + m_1} v_0, \quad (3)$$

将③式代入②式得

$$v = \frac{\sqrt{(m + m_1)^2 - 4mm_1 \cos^2 \alpha}}{m + m_1} v_0 = \frac{\sqrt{m^2 + m_1^2 - 2mm_1 \cos 2\alpha}}{m + m_1} v_0 \quad (4)$$

由③式知, 当 $\alpha = 0$ 时 v_1 达到最大,

$$v_{1\max} = \frac{2m}{m + m_1} v_0,$$

所以氢核的最大速率是

$$v_H = \frac{2m}{m + m_H} v_0,$$

氮核的最大速率是

$$v_N = \frac{2m}{m + 14m_H} v_0,$$

由以上两式得

$$m = \frac{14v_N - v_H}{v_H - v_N} m_H = \frac{14 \times 4.7 \times 10^6 - 3.3 \times 10^7}{3.3 \times 10^7 - 4.7 \times 10^6} m_H = 1.16 m_H, \quad (5)$$

$$v_0 = \frac{m + m_H}{2m} v_H = 3.07 \times 10^7 \text{ m/s}. \quad (6)$$

(2) 速度为 V_i 的氮 14 核继续与速度为 v_0 的第 i 个中子碰撞, 在每次碰撞后获得最大速率增量条件下, 氮 14 核的速度变为 V_{i+1} , 中子的末速度为 v'_0 , 由动量守恒和能量守恒有

$$\begin{cases} mv_0 + m_N V_i = mv'_0 + m_N V_{i+1}, \\ \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} m_N V_i^2 = \frac{1}{2} mv_0'^2 + \frac{1}{2} m_N V_{i+1}^2 \end{cases} \quad (7)$$

由⑦式得

$$\frac{V_i}{v_0} = 1 - a + a \frac{V_{i-1}}{v_0} \quad (8)$$

式中

$$a = \frac{m_N - m}{m_N + m} = 0.847 \quad (9)$$

按⑧式逐次迭代得

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{v_0} &= 1 - a + a \frac{V_{n-1}}{v_0} = 1 - a + a(1 - a + a \frac{V_{n-2}}{v_0}) = 1 - a^2 + a^2 \frac{V_{n-2}}{v_0} \\ &= 1 - a^3 + a^3 \frac{V_{n-3}}{v_0} = \dots = 1 - a^n + a^n \frac{V_0}{v_0} = 1 - a^n \end{aligned} \quad (10)$$

这里, 应用了题给条件

$$V_0 = 0$$

所求的次数 n 满足

$$\frac{1}{2}m_N V_n^2 = \frac{1}{2} \times 1.16 m_H v_0^2$$

即是

$$\frac{1}{2}14m_H(1-a^n)^2 v_0^2 = \frac{1}{2} \times 1.16 m_H v_0^2, \quad (11)$$

由⑨⑪式得，满足方程的最接近的值是

$$n = 2. \quad (12)$$

(3) 根据麦克斯韦速率分布

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2$$

速率取极大值的条件是

$$\frac{df(v)}{dv} = 0,$$

可知最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (13)$$

最概然速率对应的动能为

$$E_p = \frac{1}{2} m v_p^2 = k_B T. \quad (14)$$

设总粒子数为 N ，由动能分布函数定义可知为

$$f(E_k) = \frac{dN}{NdE_k} \quad (15)$$

由速率分布函数的定义可知

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv}$$

而

$$dv = \frac{dE_k}{\sqrt{2mE_k}}$$

所以

$$f(E_k) = \frac{dN}{NdE_k} = \frac{1}{\sqrt{2mE_k}} f\left(\sqrt{\frac{2E_k}{m}}\right)$$

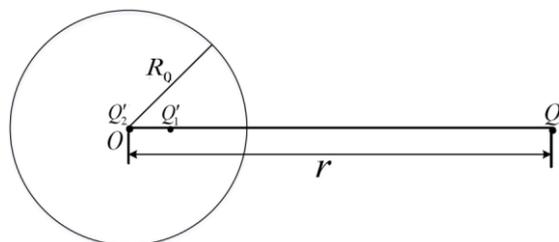
联立上述各式得

$$f(E_k) = \frac{2\pi}{(\pi k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{E_k}{k_B T}} E_k^{1/2} \quad (16)$$

动能取极大值的条件为 $\frac{df(E_k)}{dE_k} = 0$, 由此可知最概然动能为

$$E_{kp} = \frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}E_D. \quad (17)$$

二、(1) 如解题图 2a 所示, 取球心为原点, 过球心和球外点电荷所在处的直线为 X 轴 (下同), 导体球外点电荷 Q 位于 $x=r$ ($r > R_0$), 导体球外电荷及其像电荷位于 X 轴上 (下同)。由接地导体球的球面电像公式知, 点电荷 Q 的镜像电荷 Q'_1 的大小和位置分别为



解题图 2a

$$Q'_1 = -\frac{R_0}{r}Q, \quad x'_1 = \frac{R_0^2}{r} \quad (1)$$

由于不接地的导体球上电荷守恒以及导体球的外表面等势, 在球心处还存在另一像电荷 Q'_2 , 其大小和位置为

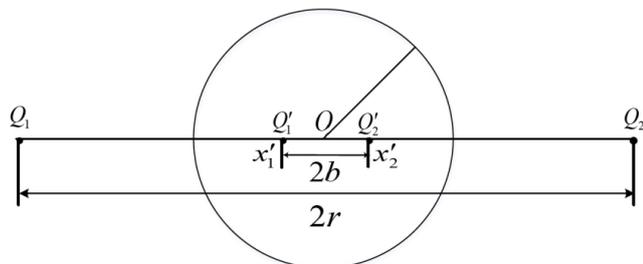
$$Q'_2 = -Q'_1 = \frac{R_0}{r}Q, \quad x'_2 = 0 \quad (2)$$

导体球内、外的像电荷 (包括像电偶极距) 大小及其位置的坐标分别用打撇、不打撇加以区分 (下同, 特别声明的除外)。

(2) 设在 X 轴上有等量异号点电荷 $Q_1 = Q$ ($Q > 0$) 和 $Q_2 = -Q$, 与金属球 (导体球) 球心 O 的距离均为 r ($r > R_0$), 如解题图 2b 所示。由球面电像公式可知, Q_1 和 Q_2 的镜像电荷 Q'_1 和 Q'_2 的大小和在的位置分别为

$$\begin{cases} Q'_1 = -\frac{R_0}{r}Q_1 = -\frac{R_0}{r}Q, & x'_1 = -b \equiv -\frac{R_0^2}{r}; \\ Q'_2 = -\frac{R_0}{r}Q_2 = \frac{R_0}{r}Q, & x'_2 = b \equiv \frac{R_0^2}{r}. \end{cases}$$

像电荷 Q'_1 和 Q'_2 之和等于零, 已保持导体球为电中性。当 $r \rightarrow \infty$ 时, $b \rightarrow 0$; 一对像电荷 Q'_1 和 Q'_2 可视为一位于球心 O 的点电偶极子, 其偶极矩 p' 的大小为



解题图 2b

$$p' = Q'_2(x'_2 - x'_1) = 2Q'_1 b = 2\frac{R_0^3}{r^2}Q \quad (2)$$

匀强外电场 E_0 可视为等量异号点电荷 $\pm Q$ 在其连线中点处产生的电场, 有

$$E_0 = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (3)$$

由此可得

$$p' = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3 \quad (4)$$

(3) 由题设, 球外点电荷 $q_1 = -q$ ($q > 0$) 和 $q_2 = q$ 分别位于 $x_1 = r - \frac{\Delta l}{2}$ 和 $x_2 = r + \frac{\Delta l}{2}$, 如解题图 2c 所示。由①式知, q_1 和 q_2 的像电荷 q'_1 和 q'_2 的大小和位置分别为

$$q'_1 = \frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} > 0, \quad x'_1 = \frac{R_0^2}{r - \frac{\Delta l}{2}} \quad (5)$$

$$q'_2 = -\frac{qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}} < 0, \quad x'_2 = \frac{R_0^2}{r + \frac{\Delta l}{2}} \quad (6)$$

由于导体球上电荷守恒和导体球的外表面等势, 在球心处还存在另一像电荷 Q' , 其大小和

位置分别为 $p_2 = \frac{R_0^3}{r_1^3} p_1, b_2 = \frac{R_0^2}{r_1}, r_2 = r - b_2; Q_1 = -q_1^{(2)} < 0, q_1^{(2)} = \frac{R_0}{r_1^2} p_1 > 0$

$$Q' = -(q'_1 + q'_2) = -\left(\frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} + \frac{-qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}}\right) = -\frac{R_0 q \Delta l}{r^2 - \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2} = -\frac{R_0}{r^2} q \Delta l < 0, \quad x'_3 = 0 \quad (7)$$

这里, 已利用条件 $\Delta l \ll r$ (下同)。

q'_1 和 q'_2 组成的像电荷体系可视为

位于

$$x'_0 = b \equiv \frac{R_0^2}{r}$$

点的像点电荷, 电荷量为

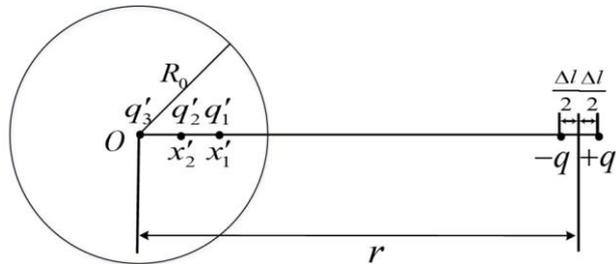
$$\begin{aligned} -Q' &= q'_1 + q'_2 = \frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} + \frac{-qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}} \\ &= \frac{R_0}{r^2} q \Delta l = -q'_3 > 0 \end{aligned}$$

和一个像点电偶极子, 电偶极距大小为

$$\begin{aligned} p' &= q'_1(x'_1 - x'_0) + q'_2(x'_2 - x'_0) \\ &= \frac{R_0^3}{r^2} \frac{q}{1 - \frac{\Delta l}{2r}} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta l}{2r}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{2r}} - 1 \right) \right] = \frac{R_0^3}{r^3} q \Delta l \end{aligned}$$

方向沿 X 轴正向, 即与球外电偶极距的方向相同。

此外, 一对点电荷 $Q' < 0$ 、 $-Q' > 0$ 体系具有不为零的点电偶极距 (以及高阶距), 电偶极距的大小为



解题图 2c

$$p'' = (-Q')(x'_0 - 0) = \frac{R_0}{r^2} q \Delta l \frac{R_0^2}{r} = \frac{R_0^3}{r^3} q \Delta l$$

方向沿 X 轴正向，即与球外电偶极距的方向相同。

合起来，球外偶极子的镜像电偶极距的大小为

$$p'_{\text{总}} = p' + p'' = 2 \frac{R_0^3}{r^3} q \Delta l \quad (8)$$

方向沿 X 轴正向，即与球外电偶极距的方向相同。

[解法 (二)]

设球外的电偶极子是点电荷

$q_1 = -q$ ($q > 0$) 位于 $x_1 = r - \frac{\Delta l}{2}$ 和

$q_2 = q$ 位于 $x_2 = r + \frac{\Delta l}{2}$ ，那么 q_1 有两个

像电荷，分别是

$$q'_1 = \frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} (> 0), \quad x'_1 = \frac{R_0^2}{r - \frac{\Delta l}{2}}; \quad (5)$$

$$q''_1 = -\frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} (< 0), \quad x''_1 = 0.$$

同理， q_2 也有两个像电荷，分别是

$$q'_2 = -\frac{qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}} (< 0), \quad x'_2 = \frac{R_0^2}{r + \frac{\Delta l}{2}}; \quad (6)$$

$$q''_2 = \frac{qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}} (> 0), \quad x''_2 = 0.$$

球外的电偶极子及其像电荷如解题图 2d 所示。

四个像电荷 q'_1, q''_1, q'_2, q''_2 构成的电荷系统的总电偶极矩为

$$p'_{\text{总}} = q'_1 x'_1 + q''_1 x''_1 + q'_2 x'_2 + q''_2 x''_2 \quad (7)$$

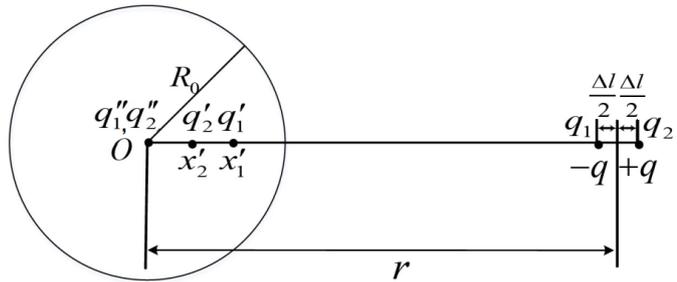
即

$$p'_{\text{总}} = \frac{qR_0^3}{[r - (\Delta l / 2)]^2} - \frac{qR_0^3}{[r + (\Delta l / 2)]^2} = 2 \frac{R_0^3}{r^3} q \Delta l \quad (8)$$

其方向与球外电偶极距的方向相同。

]

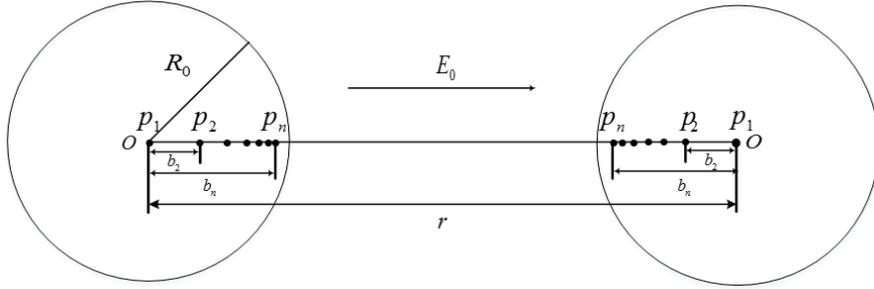
(4) 此后，对于导体球内的像电荷（包括像电偶极距）大小及其位置的坐标取消打撇的标志。如图所示，当空间电场方向有两个相同导体球时，在恒外电场作用下，在两球心位置处产生一对点电偶极子



解题图 2d

$$p_1 = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3 \quad (9)$$

这一对像偶极子又会产生次级电偶极子 p_2 以及位于电偶极子 p_2 处和球心的一对等量正负点电荷，接着产生 p_3, p_4, \dots 与隔开的等量正负点电荷的镜像电荷（孤立点电荷），如此无穷地镜像映射下去（见解题图 2e，其中孤立的镜像点电荷未画出）。由第（3）问分析知，各对点电偶极子的偶极矩和该偶极子所在位置到两球心的距离、以及孤立点电荷的大小依次为



解题图 2e

$$p_1 = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3, b_1 = 0, r_1 = r - b_1 = r \quad (10)$$

$$p_2 = \frac{R_0^3}{r_1^3} p_1, b_2 = \frac{R_0^2}{r_1}, r_2 = r - b_2; Q_1 = -q_1^{(2)} < 0, q_1^{(2)} = \frac{R_0}{r_1^2} p_1 > 0 \quad (11)$$

$$p_3 = \frac{R_0^3}{r_2^3} p_2, b_3 = \frac{R_0^2}{r_2}, r_3 = r - b_3; \quad (12)$$

$$Q_2 = -(q_2^{(2)} + q_2^{(3)}), q_2^{(2)} = \frac{R_0}{r_2} Q_1 < 0, q_2^{(3)} = \frac{R_0}{r_2} \left(\frac{p_2}{r_2} + q_1^{(2)} \right) > 0$$

$$p_4 = \frac{R_0^3}{r_3^3} p_3, b_4 = \frac{R_0^2}{r_3}, r_4 = r - b_4;$$

$$Q_3 = -(q_3^{(2)} + q_3^{(3)} + q_3^{(4)}), q_3^{(2)} = \frac{R_0}{r_2} Q_2, q_3^{(3)} = \frac{R_0}{r_3} q_2^{(2)}, q_3^{(4)} = \frac{R_0}{r_3} \left(\frac{p_3}{r_3} + q_2^{(3)} \right) > 0$$

⋮

$$p_n = \frac{R_0^3}{r_{n-1}^3} p_{n-1}, b_n = \frac{R_0^2}{r_{n-1}}, r_n = r - b_n;$$

$$Q_{n-1} = -\sum_{i=2}^n q_{n-1}^{(i)}, q_{n-1}^{(2)} = \frac{R_0}{r_2} Q_{n-2} < 0, q_{n-1}^{(3)} = \frac{R_0}{r_3} q_{n-2}^{(2)} < 0, \dots, q_{n-1}^{(n-1)} = \frac{R_0}{r_{n-2}} q_{n-2}^{(n-2)} < 0, q_{n-1}^{(n)} = \frac{R_0}{r_{n-1}} \left(\frac{p_{n-1}}{r_{n-1}} + q_{n-2}^{(n-1)} \right) > 0$$

(13)

⋮

这里， $q_n^{(i)}$ 是第 n 次镜像映射后左球内位置 b_i （即到球心的距离）上的镜像点电荷量， Q_i 是

位于球心的补偿电荷（以保证导体球电中性以及球的外表面等势）。

位于 \mathbf{b}_0 、电偶极距为 \mathbf{p} 的电偶极子的电势为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{b}_0|^3}$$

取两球连线的中点为坐标原点， x 轴水平向右，坐标原点为电势零点，则在球外空间任一点 $P(x, y)$ 处的电势为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & -E_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + \frac{r}{2} - b_n) p_n}{4\pi\epsilon_0 [(x + \frac{r}{2} - b_n)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \frac{r}{2} + b_n) \bar{p}_n}{4\pi\epsilon_0 [(x - \frac{r}{2} + b_n)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\epsilon_0 [(x + \frac{r}{2} - b_i)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 [(x + \frac{r}{2})^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\epsilon_0 [(x - \frac{r}{2} + b_i)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 [(x - \frac{r}{2})^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (14)$$

当 $y=0$ 时，两球心连线上（球外）的电势分布为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y=0) = & -E_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + \frac{r}{2} - b_n) p_n}{4\pi\epsilon_0 |x + \frac{r}{2} - b_n|^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \frac{r}{2} + b_n) \bar{p}_n}{4\pi\epsilon_0 |x - \frac{r}{2} + b_n|^3} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\epsilon_0 |x + \frac{r}{2} - b_i|} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 |x - \frac{r}{2}|} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\epsilon_0 |x + \frac{r}{2} - b_i|} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 |x - \frac{r}{2}|} \end{aligned} \quad (15)$$

两球心连线上（球外）的场强分布为

$$\begin{aligned} E(x, y=0) = & -\frac{d}{dx} \varphi(x, y=0) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2\pi\epsilon_0 |x + \frac{r}{2} - b_n|^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_n}{2\pi\epsilon_0 |x - \frac{r}{2} + b_n|^3} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\epsilon_0 |x + \frac{r}{2} - b_i|^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 |x - \frac{r}{2}|^2} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\epsilon_0 |x + \frac{r}{2} - b_i|^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 |x - \frac{r}{2}|^2} \end{aligned} \quad (16)$$

式中，像电荷构成的电偶极子的方向与导体球外的外加匀强电场的方向相同。

(5) 设 $r \rightarrow 2R_0$ 并保持两球相互绝缘。由⑩⑪⑫式可知

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_1, \quad b_2 = \frac{1}{2}R_0, \quad r_2 = \frac{3}{2}R_0 \quad (17)$$

$$p_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 p_1, \quad b_3 = \frac{2}{3}R_0, \quad r_3 = \frac{4}{3}R_0 \quad (18)$$

⋮

$$p_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 p_1, \quad b_n = \frac{n-1}{n}R_0, \quad r_n = \frac{n+1}{n}R_0; \quad (19)$$

⋮

由(16)式有

$$\begin{aligned} E(x=0, y=0) &= E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} - b_n \right|^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{2\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} - b_i \right|^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_n}{2\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} \right|^2} \\ &= E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} - b_n \right|^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=2}^n \frac{q_{n-1}^{(i)}}{2\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} - b_i \right|^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\sum_{i=2}^n q_{n-1}^{(i)}}{2\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} \right|^2} \\ &> E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\pi \varepsilon_0 \left| \frac{r}{2} - b_n \right|^3} \\ &= E_0 + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3 \left| 1 - \frac{n-1}{n} \right|^3} = E_0 + 4E_0 \sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (20)$$

这里，用到了不等式

$$-Q_{n-1} \equiv \sum_{i=2}^n q_{n-1}^{(i)} > 0$$

这可通过直接计算证明如下：

$$\begin{aligned} -Q_{n-1} &\equiv \sum_{i=2}^n q_{n-1}^{(i)} = \frac{R_0}{r_2} Q_{n-2} + \frac{R_0}{r_3} q_{n-2}^{(2)} + \cdots + \frac{R_0}{r_{n-2}} q_{n-2}^{(n-1)} + \frac{R_0}{r_{n-1}} q_{n-2}^{(n)} \\ &= \frac{R_0}{r_2} Q_{n-2} + \frac{R_0}{r_3} q_{n-2}^{(2)} + \cdots + \frac{R_0}{r_{n-2}} q_{n-2}^{(n-1)} + \left[\frac{R_0}{r_{n-1}} \left(\frac{p_{n-1}}{r_{n-1}} + q_{n-2}^{(n-1)} \right) \right] \\ &= \frac{R_0}{r_2} Q_{n-2} + \frac{R_0}{r_3} q_{n-2}^{(2)} + \cdots + \frac{R_0}{r_{n-2}} q_{n-2}^{(n-2)} + \left[\frac{R_0}{r_{n-1}^2} p_{n-1} + \frac{R_0}{r_{n-1}} \left(\frac{p_{n-2}}{r_{n-2}} + q_{n-3}^{(n-2)} \right) \right] \\ &= \frac{R_0}{r_2} Q_{n-2} + \frac{R_0}{r_3} q_{n-2}^{(2)} + \cdots + \frac{R_0}{r_{n-2}} q_{n-2}^{(n-2)} + \frac{R_0}{r_{n-1}} q_{n-2}^{(n-1)} + \frac{R_0}{r_{n-1}^2} p_{n-1} \\ &> \frac{R_0}{r_{n-1}} \left[Q_{n-2} + \sum_{i=2}^{n-1} q_{n-2}^{(i)} \right] + \frac{R_0}{r_{n-1}^2} p_{n-1} = \frac{R_0}{r_{n-1}^2} p_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

三、(1) 二能级系统处于能量为 E_1 的概率满足玻尔兹曼分布 $p \propto e^{-E/k_B T}$ ，有

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{E_1}{k_B T}} \quad (1)$$

原子处于不同能级的总概率为 1，即

$$p_1 + p_0 = 1 \quad (2)$$

由①②式得

$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \quad (3)$$

$$p_1 = \frac{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \quad (4)$$

(2) 量子奥托循环示意图如解题图 3a 所示。下面计算量子奥托热机循环过程中的各个物理量的增量。

A→B (量子等容) 过程:

不做功, 即 $E_A = E_B$, 吸热全部用来增加内能, 因此吸收热量为

$$\Delta_1 \langle E \rangle = Q_1 = E_B (p_B - p_A) \quad (5)$$

B→C (量子绝热) 过程:

不吸收或者放出热, 故 $p_B = p_C$, 内能增量为

$$\Delta_2 \langle E \rangle = (E_C - E_B) p_B \quad (6)$$

对外做功为

$$W_2 = -\Delta_2 \langle E \rangle = -(E_C - E_B) p_B = (E_B - E_C) p_B \quad (7)$$

C→D (量子等容) 过程:

不做功, 即 $E_C = E_D$, 放出的热来自内能减少, 内能的增量为

$$\Delta_3 \langle E \rangle = E_D (p_A - p_B) \quad (8)$$

放出热量为

$$Q_2 = -\Delta_3 \langle E \rangle = E_C (p_B - p_A) \quad (9)$$

D→A (量子绝热) 过程:

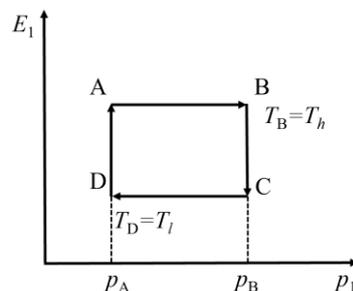
不吸收或者放出热, 内能增量为

$$\Delta_4 \langle E \rangle = (E_A - E_D) p_A \quad (10)$$

对外做功为

$$W_4 = -\Delta_4 \langle E \rangle = -(E_A - E_D) p_A = (E_D - E_A) p_A \quad (11)$$

(3) 对量子奥托热机, 设循环过程中吸热为 Q_1 和放热为 Q_2 , 效率为



解题图 3a

$$\eta_{\text{奥}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (12)$$

将⑤和⑨式代入⑫式得

$$\eta_{\text{奥}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{E_C}{E_B} \quad (13)$$

由于 B→C 过程中, $p_B = p_C$, 有

$$\frac{e^{\frac{E_B}{k_B T_B}}}{1 + e^{\frac{E_B}{k_B T_B}}} = \frac{e^{\frac{E_C}{k_B T_C}}}{1 + e^{\frac{E_C}{k_B T_C}}} \quad (14)$$

化简后, 再根据 $T_B = T_h$ 有

$$\frac{E_B}{T_h} = \frac{E_C}{T_C} \quad (15)$$

由⑬⑮式得

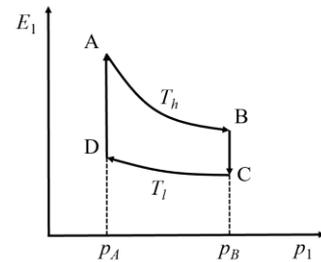
$$\eta_{\text{奥}} = 1 - \frac{E_l}{E_h} = 1 - \frac{T_C}{T_h} \quad (16)$$

量子卡诺循环示意图如解题图 3b 所示。下面计算量子卡诺热机循环过程中的各个物理量的增量。

A→B 过程:

$$\begin{aligned} dQ_1 &= E_1 dp_1 = E_1 d \left(\frac{e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} \right) \\ &= E_1 \frac{-\frac{1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right) - e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \left(-\frac{1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)^2} dE_1 = \frac{-\frac{E_1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} \right)^2} dE_1 \end{aligned}$$

此过程中吸热为



解题图 3b

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_{E_A}^{E_B} \frac{-\frac{E_1}{k_B T_h} e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}\right)^2} dE_1 = \int_{E_A}^{E_B} \frac{E_1}{\left(1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}\right)^2} de^{-\frac{E_1}{k_B T_h}} = \int_{E_A}^{E_B} E_1 d\left(-\frac{1}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}\right) \\
&= \frac{E_A}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{E_B}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + \int_{E_A}^{E_B} \frac{1}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} dE_1 = \frac{E_A}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{E_B}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + \int_{E_A}^{E_B} \frac{k_B T_h de^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_1}{k_B T_h}}} \quad (17) \\
&= \frac{E_A}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{E_B}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + k_B T_h \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}
\end{aligned}$$

内能增量为

$$\Delta E_1 = \frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} E_B - \frac{e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} E_A \quad (18)$$

对外做功为

$$W_1 = Q_1 - \Delta E = E_A - E_B + k_B T_h \ln \frac{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \quad (19)$$

B→C 过程:

在这个过程中, 概率分布始终不变, $p_B = p_C$, 过程中无传热, 有

$$\frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} = \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}$$

化简后得

$$E_C = \frac{T_l}{T_h} E_B \quad (20)$$

同理, $p_D = p_A$, 故 D→A 过程中无吸热或放热发生, 有

$$\frac{e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}{1 + e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} = \frac{e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}{1 + e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}$$

化简后得

$$E_D = \frac{T_l}{T_h} E_A \quad (21)$$

吸热为

$$Q_2 = 0 \quad (22)$$

对外做功等于内能减少

$$W_2 = -\Delta E_2 = \frac{e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1+e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} E_B - \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_c}}}{1+e^{-\frac{E_C}{k_B T_h}}} E_C \quad (23)$$

C→D 过程:

过程 C→D 与 A→B 类似, 均为等温过程, 放热的计算可以类比(17)式, 并代入(20)和(21)式后得, 放热为

$$Q_3 = \frac{E_D}{1+e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} - \frac{E_C}{1+e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}} + k_B T_l \ln \frac{1+e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}{1+e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} = \frac{\frac{T_l}{T_h} E_A}{1+e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} - \frac{\frac{T_l}{T_h} E_B}{1+e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}} + k_B T_l \ln \frac{1+e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1+e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \quad (24)$$

内能增量为

$$\Delta E_3 = \frac{e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}{1+e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} E_D - \frac{e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}}{1+e^{-\frac{E_C}{k_B T_l}}} E_C \quad (25)$$

对外做功为

$$W_3 = Q_3 - \Delta E_3 = E_C - E_D + k_B T_l \ln \frac{1+e^{-\frac{E_B}{k_B T_h}}}{1+e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} \quad (26)$$

D→A 过程:

吸热为

$$Q_4 = 0 \quad (27)$$

对外做功等于内能减少

$$W_4 = -\Delta E_4 = \frac{e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}}{1+e^{-\frac{E_D}{k_B T_l}}} E_D - \frac{e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}}{1+e^{-\frac{E_A}{k_B T_h}}} E_A \quad (28)$$

对量子卡诺热机, 循环过程中吸热 Q_1 , 放热 Q_3 , 将(17)和(24)式代入效率计算公式得

$$\eta_{\text{卡}} \equiv \frac{Q_1 - Q_4}{Q_1} = 1 - \frac{Q_4}{Q_1} = 1 - \frac{T_l}{T_h} \quad (29)$$

这与经典卡诺热机的效率一致。然而 $T_l < T_c < T_h$, 故由(16)(29)式知

$$\eta_{\text{奥}} < \eta_{\text{卡}} \quad (30)$$

因此, 量子奥托热机的效率低于量子卡诺热机的效率。

四、(1) 一束频率为 f 的光波被流体中运动粒子所散射。光波在流体中的传播速度大小为 c , 粒子运动速度大小为 v ($v \ll c$)。由于多普勒效应, 粒子接收到的光的频率为

$$f' = f \left(1 + \frac{vn}{c} \cos \theta_1 \right) \quad (1)$$

式中 θ_1 为光波入射方向与散射粒子运动速度之间的夹角。同样由于多普勒效应, 在散射方向

上探测到来自粒子的散射光的频率为

$$f'' = \frac{f'}{1 - \frac{vn}{c} \cos \theta_2} \quad (2)$$

其中 θ_2 为散射光波传播方向与散射粒子速度之间的夹角。

散射光与入射光的频率之差为

$$\Delta f = f'' - f = \frac{fvn}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (3)$$

已知粒子的速度为 $v = 1\text{m/s}$ ，光的频率量级为 10^{14}Hz ，

$$\Delta f = \frac{fvn}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) < \frac{2fvn}{c} \approx 0.7\text{MHz} < 5\text{MHz} \quad (4)$$

因此，分辨率为 5MHz 的光谱仪不能对以此速度运行的粒子进行探测。

(2) 到达探测器的两散射光 1 和 2 的电场为

$$E_1 = E_0 \cos[2\pi(f + \Delta f)t + \phi_1] \quad (5)$$

$$E_2 = E_0 \cos[2\pi(f + \Delta f')t + \phi_2]$$

其中 Δf 、 $\Delta f'$ 分别为散射光 1 和 2 与原光频率的频率之差。两散射光的合成光强为

$$\begin{aligned} I(t) &\propto |E_1 + E_2|^2 \\ &= E_0^2 + \frac{E_0^2}{2} \cos[4\pi(f + \Delta f)t + 2\phi_1] + \frac{E_0^2}{2} \cos[4\pi(f + \Delta f')t + 2\phi_2] \\ &\quad + E_0^2 \cos[4\pi(2f + \Delta f' + \Delta f)t + (\phi_1 + \phi_2)] + E_0^2 \cos[2\pi(\Delta f - \Delta f')t + \phi_1 - \phi_2] \end{aligned} \quad (6)$$

式中，第一项是常量；中间三项的变化频率为光频及其和频，探测器的频率响应跟不上其时间变化，它们实际上表现为其时间平均值，也是常量；第五项的变化频率是光频的差频。

因此，探测器输出的光电流为

$$i(t) = kE_0^2 \cos(2\pi\Delta f_D t + \phi_1 - \phi_2) \quad (7)$$

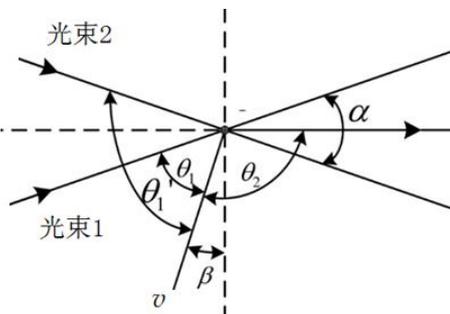
这里

$$\Delta f_D = \Delta f - \Delta f'$$

是光束 1 和光束 2 的散射光频率差之差。光束 1 和光束 2 及其被速度为 v 的粒子散射的散射光如解图 4a 所示。由题意知，③式即为光束 1 的散射光频率差，类似的，对于光束 2 获得的频率差为

$$\Delta f' = \frac{fvn}{c} (\cos \theta'_1 + \cos \theta_2) \quad (8)$$

因此光束 1 和光束 2 的散射光频率差之差



解图 4a

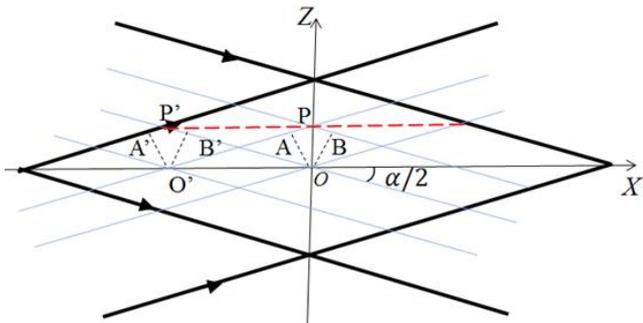
$$\begin{aligned}
\Delta f_D &= \Delta f' - \Delta f \\
&= \frac{f v n}{c} (\cos \theta'_1 - \cos \theta_1) \\
&= \frac{2 f v n}{c} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta
\end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$\alpha = \theta'_1 - \theta_1, \quad \beta = \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta_1 - \pi)$$

因为光电流信号仅仅与散射光频率差之差相关，与 θ_2 没有关系，所以此方法对速度的测量与散射光的方向无光。

(3) 如解题图 4b 所示，黑色粗线所包围的菱形为两对称射入相干平行光束相交区域，蓝色细线代表区域内的光线，对于位于 z 轴上的各点来说 $\Delta\phi = 0$ ，因此在相交区域 z 轴上的各点干涉相长（比如 O 点与 O' 点），将呈现干涉相长明条纹。过 O 点做垂线 OA 垂直于 AP ， OB 垂直于 BP ，因此两相干光到 P 点相对于 O 点的相位差为



解题图 4b

因此两相干光到 P 点相对于 O 点的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (AP + BP) = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\alpha}{2} \tag{10}$$

其中 d 为 P 点到 X 轴的距离。类似的，对 O' 点做垂线 $O'A'$ 垂直于 $A'P'$ ， $O'B'$ 垂直于 $B'P'$ ，因此两相干光到 P' 点的相位差为

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi}{\lambda} (A'P' + B'P') = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\alpha}{2} \tag{11}$$

因此，对于相交区域内 $P'P$ 上的各点干涉情况一致，由图中几何关系可知， $P'P$ 平行 $O'O$ ，如果各点满足 π 的偶数倍，则干涉相长，

$$\frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\alpha}{2} = 2j\pi, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \tag{12}$$

所以，第零级明条纹在相交区域内 X 轴上，其余明条纹将平行于 X 轴，呈等间距分布。形成亮条纹两个相邻明条纹之间相位差 2π ，有

$$2d \sin(\alpha/2) = \lambda \tag{13}$$

因此，干涉条纹间距为

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \tag{14}$$

由于光强明暗相间的结果，每当粒子运动到明场时将散射出一个光脉冲，所以光脉冲的频率与粒子速度的竖直方向分量有关。粒子穿越相邻两条亮纹的时间为

$$\tau = \frac{d}{v \cos \beta} \quad (15)$$

于是光脉冲频率为

$$f_D = \frac{2fvn}{c} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \quad (16)$$

[解法 (二)]

两束入射光的方向分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{i} - \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

在位矢 \vec{r} 处, 两束光的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2) \quad (11)$$

所有相位差都为 $\Delta\phi$ 的场点满足的方程为

$$\Delta\phi = 2y \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12)$$

可见干涉条纹为一系列与 X 轴平行的直线。条纹间距 d 满足

$$2d \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \quad (13)$$

于是

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (14)$$

粒子穿越相邻两条亮纹的时间为

$$\tau = \frac{d}{v \cos \beta} \quad (15)$$

于是光脉冲频率为

$$f_D = \frac{2fvn}{c} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \quad (16)$$

]

五、(1) 星际介质处于等离子态, 由于正离子质量远大于负离子 (电子) 的质量, 因此在电场的作用下电子运动, 而离子可视为不动。星际介质的离子数密度很小, 离子间的碰撞可忽略。电子的运动是低速的, 电磁波的磁场对电子的作用也可忽略。设电子的运动速度为 v , 则电子受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

由于 \mathbf{E} 与电磁波传播方向垂直， \mathbf{B} 与传播方向平行， $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与传播方向垂直，故 \mathbf{F} 与传播方向垂直，从而使电子在垂直于信号传播方向的平面中作圆周运动。由牛顿第二定律有

$$eE_0 \pm evB = \frac{m_e v^2}{R_e} \quad (2)$$

式中，

$$v = 2\pi f R_e \quad (3)$$

\pm 对应于电子两个不同的旋转方向。联立②③式，解得

$$R_{e\mp} = \frac{eE_0}{2\pi m_e f (2\pi f \mp \frac{eB}{m_e})} \quad (4)$$

[解法 (二)]

电子在洛伦兹力作用下的运动方程为

$$m_e \ddot{\mathbf{x}}(t) = -e[\mathbf{E}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{B}] \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}(t)$ 为该点电磁波的电场

$$\mathbf{E}(t) \equiv E_x \pm iE_y = E_0 e^{\pm i(\omega t - kz)}$$

这里 $\omega = 2\pi f$ ，而 $\theta(t)$ 是在垂直于电磁波传播方向的平面（作为复平面）上电场的辐角。在上述复平面上

$$\mathbf{x}(t) = R_e e^{\pm i\omega t} \quad (2)$$

式中， ω 可理解为该电子回转的角速度。由②式和 $\mathbf{x}(t)$ 与 \mathbf{B} 正交可知

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{B} = \pm i[\omega \times \mathbf{x}(t)] \times \mathbf{B} = \pm i\mathbf{x}(t)(\omega \cdot \mathbf{B}) = \pm i\omega B \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

由①②③式有

$$-m_e \omega^2 R_e = -e[E_0 \pm \omega R_e B]$$

解得

$$R_{e\mp} = \frac{eE_0}{2\pi m_e f (2\pi f \mp \frac{eB}{m_e})} \quad (4)$$

]

(2) 星际介质中单位体积内的电子数为 n_e ，所以介质的极化强度为

$$\mathbf{P}_{\mp} = -n_e e R_{e\mp} \quad (5)$$

电位移矢量为

$$\mathbf{D}_{\mp} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\mp} = \left(\varepsilon_0 - \frac{n_e e^2}{4\pi^2 m_e f^2 \mp 2\pi f e B} \right) \mathbf{E} \quad (6)$$

从而得到介质的介电常数

$$\varepsilon_{\mp} = \varepsilon_0 - \frac{n_e e^2}{4\pi^2 m_e f^2 \mp 2\pi f e B} \quad (7)$$

折射率 n 为

$$n_{\mp}^2 = \frac{\varepsilon_{\mp}}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{f_p^2}{f(f \mp f_B)} \quad (8)$$

式中

$$f_p = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}}, \quad f_B = \frac{eB}{2\pi m_e}$$

分别是等离子体的特征频率、电子在磁场中的同步回旋频率。

由波数、频率和折射率的关系 $k = \frac{\omega}{c} n$ ($\omega = 2\pi f$) 和⑧式得, 群速度为

$$v_{g\mp} = \frac{d\omega}{dk_{\mp}} = \frac{1}{\frac{dk_{\mp}}{d\omega}} = \frac{c}{n_{\mp} + \omega \frac{dn_{\mp}}{d\omega}} = \frac{n_{\mp} c}{1 \pm \frac{f_p^2 f_B}{2f(f \mp f_B)^2}} \quad (9)$$

在介质中群速度为零的电磁波是不能在该介质中传播的,

$$v_{g\mp} = 0 \quad (10)$$

即

$$f^2 \mp f_B f - f_p^2 = 0$$

舍去方程的负根, 得到能通过星际介质的最低电磁波频率为

$$f_{c\mp} = \frac{-(\mp f_B) + \sqrt{f_B^2 + 4f_p^2}}{2} = \frac{e}{4\pi} \left(\sqrt{\frac{B^2}{m_e^2} + \frac{4n_e}{\varepsilon_0 m_e}} \pm \frac{B}{m_e} \right) \quad (11)$$

当 $B=0$ 时, $f_{c\mp}(B=0) = f_p$, 这正是把 f_p 称为等离子体特征频率的原因。

(3) 频率为 f 的电磁波信号通过该介质达到地球的时间比其在真空中传播的时间延迟量为

$$\Delta t_{\mp} = \int_0^d \frac{dl}{v_{g\mp}} - \frac{d}{c} \quad (12)$$

将⑨式代入⑫式, 注意到 $f_p \ll f, f_B \ll f$, 有

$$\begin{aligned} \Delta t_{\mp} &= \int_0^d \frac{dl}{v_{g\mp}} - \frac{d}{c} \approx \int_0^d \frac{(1 \pm \frac{f_p^2 f_B}{2f^3}) dl}{c \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} \mp \frac{f_p^2 f_B}{f^3}}} - \frac{d}{c} \approx \frac{1}{c} \int_0^d \left[1 + \frac{f_p^2}{2f^2} \pm \frac{f_p^2 f_B}{f^3} \right] dl - \frac{d}{c} \\ &= \frac{d}{c} \frac{f_p^2}{2f^2} \left(1 \pm \frac{2f_B}{f} \right) = \frac{1}{2f^2 c} \frac{e^2 n_e d}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e} \left(1 \pm \frac{eB}{\pi m_e f} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

(4) 由波数与折射率关系 $k = \frac{\omega}{c} n$ 和⑧式 (在 $f_p \ll f, f_B \ll f$ 的近似下),

$$k_{\mp}(f) = \frac{2\pi f}{c} n_{\mp} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} \mp \frac{f_p^2 f_B}{f^3}} \quad (14)$$

从脉冲星发出的频率为 f 的电磁波在通过星际介质区间 d 后形成的两种不同的电磁波信号的相位差为

$$\begin{aligned} \Delta\phi &\equiv \phi_+ - \phi_- = -\omega(t_+ - t_-) + \int_0^d (k_+ - k_-) dl \\ &= -2\pi f \frac{d}{c} \frac{f_p^2}{2f^2} \left[\left(1 - \frac{2f_B}{f}\right) - \left(1 + \frac{2f_B}{f}\right) \right] + \frac{2\pi f d}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} + \frac{f_p^2 f_B}{f^3}} - \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} - \frac{f_p^2 f_B}{f^3}} \right) \\ &= 2\pi f \frac{d}{c} \frac{f_p^2}{2f^2} \frac{4f_B}{f} + \frac{2\pi f d}{c} \frac{f_p^2 f_B}{f^3} = \frac{6\pi d}{c} \frac{f_p^2 f_B}{f^2} = \frac{3e^3 n_e dB}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e^2 c f^2} \end{aligned} \quad (15)$$

(5) 由(15)式可知, 电子密度出现涨落会引起折射率的变化。由(8)式得

$$\Delta n_{\mp} = -\frac{f_p^2}{2nf(f \mp f_B)} \frac{\Delta n_e}{n_e} \quad (16)$$

由(16)式和 $k = \frac{\omega}{c} n$ 得, 波数因电子密度涨落引起的变化为

$$\Delta k_{\mp} = \frac{2\pi f}{c} \Delta n_{\mp} = -\frac{\pi f_p^2}{nc(f \mp f_B)} \frac{\Delta n_e}{n_e} \quad (17)$$

于是, 频率为 f 的电磁波通过星际介质形成的两种不同的电磁波信号因电子密度涨落产生的相位移动为

$$\Delta\phi_{\mp} = -a\Delta k_{\mp} = \frac{\pi f_p^2}{nc(f \mp f_B)} \frac{\Delta n_e}{n_e} a$$

六、(1) 入射高能质子的动量为

$$P = \sqrt{\frac{E_p^2}{c^2} - M_p^2 c^2} = 6.735 \text{ GeV}/c \quad (1)$$

所产生的反质子的动量近似为

$$P_{\bar{p}} = \frac{P}{4} = 1.684 \text{ GeV}/c \quad (2)$$

[解法(二)]

$$E_p + M_p c^2 = 4E_{\bar{p}} \quad (1)$$

$$E_{\bar{p}} = \sqrt{P_{\bar{p}}^2 c^2 + M_p^2 c^4} \quad (2)$$

]

反质子的运动速度为

$$v_{\bar{p}} = \frac{P_{\bar{p}}c^2}{E_{\bar{p}}} = \frac{P_{\bar{p}}c^2}{\sqrt{P_{\bar{p}}^2c^2 + M_{\bar{p}}^2c^4}} = 0.873c \quad (3)$$

反质子从 S_1 运动到 S_2 的时间为

$$t_{\bar{p}} = \frac{l}{v_{\bar{p}}} = 45.8 \text{ ns}. \quad (4)$$

π 介子的能量为

$$E_{\pi} = E_{k,\pi} + m_{\pi}c^2 = E_{\bar{p}} - M_{\bar{p}}c^2 + m_{\pi}c^2. \quad (5)$$

π 介子的运动速度为

$$v_{\pi} = \frac{P_{\pi}c^2}{E_{\pi}} = \frac{c\sqrt{E_{\pi}^2 - m_{\pi}^2c^4}}{E_{\pi}} = 0.992c \quad (6)$$

π 介子从 S_1 运动到 S_2 的时间为

$$t_{\pi} = \frac{l}{v_{\pi}} = 40 \text{ ns}. \quad (7)$$

(2) 带电粒子在折射率为 n 的介质中以速度 v ($v > c/n$) 从位置 O 匀速运动到位置 P 的过程 (经历时间间隔为 t) 中, 在其运动的路径上的各点所激发的介质中的电磁场形成一个圆锥形包络面, 如解题图 6a 所示。切伦科夫辐射方向沿圆锥包络面的法线方向, 它与带电粒子运动方向的夹角为

$$\cos \theta = \frac{ct/n}{vt} = \frac{c}{nv}.$$

所以

$$\theta = \arccos \frac{c}{nv}. \quad (8)$$

(3) 球面镜的焦距为

$$f = R/2. \quad (9)$$

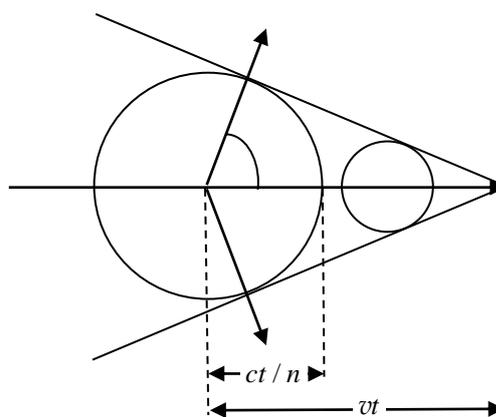
焦平面上光环的半径为

$$r = f \tan \theta = \frac{R}{2} \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1}. \quad (10)$$

(4) 由动量守恒得

$$\gamma_1 m_{\pi} v_1 + \gamma_2 m_{\pi} v_2 + \gamma_3 m_{\pi} v_3 = 0, \quad (11)$$

由能量守恒得



解题图 6a

$$m_{\pi}c^2(\gamma_1 - 1) + m_{\pi}c^2(\gamma_2 - 1) + m_{\pi}c^2(\gamma_3 - 1) = Q. \quad (12)$$

式中

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}. \quad (13)$$

[解法 (二)]

由动量守恒有

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0 \quad (11)$$

由能量守恒有

$$E_{k,1} + E_{k,2} + E_{k,3} = Q \quad (12)$$

以及

$$E_{k,i} = \sqrt{p_i^2 c^2 + m_{\pi}^2 c^4} - m_{\pi} c^2 \quad (13)$$

]]

可得

$$p_i = \frac{Q}{c} \sqrt{d_i^2 + 2d_i K},$$

其中 $K = m_{\pi}c^2 / Q$, $d_i = K(\gamma_i - 1)$, 于是 3 个 π 介子的动量大小 p_1 、 p_2 、 p_3 满足 $p_i + p_j > p_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 。

d_1 、 d_2 、 d_3 可能的分布范围为:

$$\begin{aligned} \sqrt{d_1^2 + 2d_1 K} &\leq \sqrt{d_2^2 + 2d_2 K} + \sqrt{d_3^2 + 2d_3 K} \\ \sqrt{d_2^2 + 2d_2 K} &\leq \sqrt{d_1^2 + 2d_1 K} + \sqrt{d_3^2 + 2d_3 K} \\ \sqrt{d_3^2 + 2d_3 K} &\leq \sqrt{d_1^2 + 2d_1 K} + \sqrt{d_2^2 + 2d_2 K} \end{aligned} \quad (14)$$

在题给坐标系中有

$$d_1 = y, \quad d_2 = -(\sqrt{3}x + y - 1)/2, \quad d_3 = (\sqrt{3}x - y + 1)/2 \quad (15)$$

将(15)式代入(14)式得

$$2(3K+1)y^3 - 6(3K+1)x^2y + (12K^2-1)y^2 + 3(2K+1)^2x^2 - 2(4K+1)Ky \leq 0. \quad (16)$$

若 $m_{\pi} = 0$, 则 $K = 0$, 于是

$$(y-1/2)(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x) \leq 0 \quad (17)$$

表示三条边的中点连接成的三角形区域。

七、(1) 假设整个容器是实心时, 它分为长圆柱部分 (I) 和半球部分 (II)。在坐标系 XOZ 中, 圆柱部分 (I) 质心的位置为

$$x_{\text{CI}} = 0, \quad z_{\text{CI}} = \frac{l}{2} = R$$

半球部分 (II) 质心的位置为

$$x_{\text{CII}} = 0, \quad z_{\text{CII}} = \frac{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) z dz}{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) dz} = -\frac{3}{8} R_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{8} R = -0.6495R \quad (1)$$

设整个实心体的质心坐标为 $(x_{\text{C实}} = 0, z_{\text{C实}})$ ，则

$$(\rho \pi R_2^2 l + \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3) z_{\text{C实}} = \rho \pi R_2^2 l z_{\text{CI}} + \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3 z_{\text{CII}} = \rho \pi R_2^2 l \frac{l}{2} - \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3 \frac{3R_2}{8}$$

于是

$$x_{\text{C实}} = 0, \quad z_{\text{C实}} = \frac{3(2l^2 - R_2^2)}{4(3l + 2R_2)} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{16} R = 0.3962R \quad (2)$$

相应地，整个欹器空心部分的质心坐标为

$$x_{\text{C空}} = t = 0.3R, \quad z_{\text{C空}} = \frac{3(2l^2 - R_1^2)}{4(3l + 2R_1)} = \frac{21}{32} R = 0.6563R \quad (3)$$

设 $m_{\text{实}}$ 和 $m_{\text{空}}$ 分别是整个欹器是实心时欹器的质量和整个欹器空心部分用欹器材质刚好填实时的质量，有

$$m_{\text{实}} = \rho_1 \pi R_2^2 \left(\frac{2R_2}{3} + l \right), \quad m_{\text{空}} = \rho_1 \pi R_1^2 \left(\frac{2R_1}{3} + l \right)$$

整个瓶子的质心坐标为

$$x_{\text{C}} = \frac{m_{\text{实}} x_{\text{C实}} + (-m_{\text{空}}) x_{\text{C空}}}{m_{\text{实}} + (-m_{\text{空}})} = -\frac{R_1^2 t (3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3(5 - 3\sqrt{3})}{5} R = -0.1177R \quad (4)$$

$$z_{\text{C}} = \frac{m_{\text{实}} z_{\text{C实}} + (-m_{\text{空}}) z_{\text{C空}}}{m_{\text{实}} + (-m_{\text{空}})} = \frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)]} = \frac{3}{2} (3\sqrt{3} - 5) R = 0.2942R \quad (5)$$

悬挂点 Q 的位置为 $(-\frac{1}{10}R, \frac{2\sqrt{3}}{11}R)$ ，欹器内没装水悬挂时欹器倾斜的角度为

$$\theta_0 = \operatorname{arccot} \frac{z_{\text{C}} - z_{\text{Q}}}{x_{\text{C}} - x_{\text{Q}}} = \operatorname{arccot} \frac{25(5\sqrt{3} - 3)}{121} = 0.707439 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 40.5333^\circ \quad (6)$$

(2) 由球绕直径的转动惯量知，半球绕其底面圆直径的转动惯量为

$$I_{11} = \frac{1}{2} I_1 = \frac{4}{15} \pi \rho R^5$$

由平行轴定理知，半球绕穿过其质心且平行其底面的转轴的转动惯量为

$$I_{1c} = I_{11} - \frac{2}{3}\pi\rho R^3\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{480}\pi\rho R^5 = 0.1729\pi\rho R^5 \quad (7)$$

实心敬器绕过悬挂点的水平轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I_{\text{实}} &= I_{1c}(R=R_2) + \frac{2}{3}\rho_1\pi R_2^3[x_Q^2 + \left(-\frac{3}{8}R_2 - z_Q\right)^2] \\ &\quad + I_2(R=R_2, L=l) + \rho_1\pi R_2^2 l[x_Q^2 + \left(\frac{l}{2} - z_Q\right)^2] \\ &= \frac{79588 + 7591\sqrt{3}}{6050}\rho_1\pi R^5 = 15.3283\rho_1\pi R^5 \end{aligned} \quad (8)$$

(填实后的)空心部分绕过悬挂点的水平轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I_{\text{空}} &= I_{1c}(R=R_1) + \frac{2}{3}\rho_1\pi R_1^3[(x_Q + t)^2 + \left(-\frac{3}{8}R_1 - z_Q\right)^2] \\ &\quad + I_2(R=R_1, L=l) + \rho_1\pi R_1^2 l[(x_Q + t)^2 + \left(\frac{l}{2} - z_Q\right)^2] \\ &= \frac{(24953 - 3850\sqrt{3})}{6050}\rho_1\pi R^5 = 3.0223\rho_1\pi R^5 \end{aligned} \quad (9)$$

敬器绕过悬挂点的水平轴的转动惯量

$$I = I_{\text{实}} - I_{\text{空}} = \frac{(54635 + 11441\sqrt{3})}{6050}\rho_1\pi R^5 = 12.306\rho_1\pi R^5 \quad (10)$$

质心 C 到过悬挂点 Q 的水平轴的距离为

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_C - x_Q)^2 + (z_C - z_Q)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{R_1^2 t(3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)} - x_Q\right)^2 + \left(\frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2)]} - z_Q\right)^2} \\ &= \frac{(3\sqrt{3} - 5)\sqrt{2}}{220}\sqrt{30848 - 17541\sqrt{3}}R = 0.02722R \end{aligned}$$

敬器的质量为

$$m_{\text{敬}} = m_{\text{实}} - m_{\text{空}} = \rho_1\pi[R_2^2\left(\frac{2R_2}{3} + l\right) - R_1^2\left(\frac{2R_1}{3} + l\right)] = \frac{2}{3}(5 + 3\sqrt{3})\rho_1\pi R^3$$

敬器绕悬挂点连线摆动的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{敬}}gd}{I}} = \sqrt{\frac{110\sqrt{2}(30848 - 17541\sqrt{3})}{163905 + 34323\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{g}{R}} = 0.122624\sqrt{\frac{g}{R}} \quad (11)$$

(3) 设敬器正立时里面装的水的质量为 m_s 。此时水、敬器以及整个体系质心的横坐标 x_{CS} 、 x_C 和 $x_{C'}$ 分别为

$$x_{CS} = t \quad (12)$$

$$x_C = \frac{3(5 - 3\sqrt{3})}{5}R = -0.1177R$$

$$x_{C_t} = x_Q \quad (13)$$

故

$$x_{C_t}(m_s + m_{\text{墩}}) = m_s x_{C_s} + m_{\text{墩}} x_C \quad (14)$$

解得

$$m_s = \frac{m_{\text{墩}}(x_C - x_{C_t})}{x_{C_t} - x_{C_s}} = \frac{m_{\text{墩}}(x_C - x_Q)}{x_Q - t} = 0.3006\rho_1\pi R^3 = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (15)$$

由于

$$m_s = 0.9018\rho_2\pi R^3 > \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 \quad (16)$$

故水的体积大于底部半球的容器，即 $h > R$ 。因而有

$$m_s = \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 + \rho_2\pi R^2(h - R) = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (17)$$

解得

$$h = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6}R = 1.23526R \quad (18)$$

此时整个体系质心的 z 坐标为

$$\begin{aligned} z_{C_t} &= \frac{m_{\text{墩}}z_C + m_s z_{C_s}}{m_{\text{墩}} + m_s} = \frac{3\{[\rho_1(R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2 R_1^2(2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)]\}}{4\{\rho_1[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_1^3)] + \rho_2 R_1^2(3h - R_1)\}} \\ &= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} = 0.271326R < z_Q \end{aligned} \quad (19)$$

故 $h = 1.23526R$ 时墩器正立。

〔（解法二）〕

若 $h \leq R_1$ 时墩器正立， $h \leq R_1$ 时，水的质心位置为

$$\begin{cases} x_{C_{S_1}} = t = 0.3R, \\ z_{C_{S_1}} = \frac{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2 \pi (R^2 - z^2) z dz}{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2 \pi (R^2 - z^2) dz} = -\frac{3(2R - h)^2}{4(3R - h)} \end{cases} \quad (12)$$

墩器的质量 m 和此时墩器中水的质量 m_s 分别为

$$\begin{aligned} m &= \rho_1 \left[\left(\frac{2}{3} \pi R_2^3 + \pi R_2^2 l \right) - \left(\frac{2}{3} \pi R_1^3 + \pi R_1^2 l \right) \right] = \frac{1}{3} \rho_1 \pi [3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)] \\ &= \frac{1}{3} \rho_1 \pi (R_2 - R_1) [3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)] \end{aligned}$$

$$m_{S_1} = \int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2 \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{\rho_2 \pi h^2 (3R - h)}{3}$$

整个装置的质心 C_t 的位置坐标为

$$x_{Ct1} = \frac{mx_c + m_s x_{cs}}{m + m_s} = \frac{[\rho_1 R_1^2 (3l + 2R_1) + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)]t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)} \quad (13)$$

$$= \frac{3R(24R^3 - 3h^2R + h^3)}{10[(h - 3R)h^2 - 6(5 + 3\sqrt{3})R^3]}$$

敬器身正立时，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct} = x_Q = -0.1h, \quad (14)$$

解得

$$h = -0.8394R, \quad h = 1.2389R, \quad h = 2.5996R \quad (15)$$

均不满足 $0 < h < R$ 。故此时无解。因此敬器竖直时，必有

$$h > R_1$$

当 $h > R_1$ 时，与③④式对比（③④式中可视为 $l = h - R_1$ ），得水的质心位置为

$$x_{cs} = t = 0.3R,$$

$$z_{cs} = \frac{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) z dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 z dz}{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 dz} = \frac{3(2h^2 - 4hR + R^2)}{4(3h - R)} \quad (16)$$

此时敬器中水的质量 m_{s2} 为

$$m_{s2} = \rho_1 \pi R_1^2 (h - \frac{R_1}{3})$$

整个装置的质心位置为

$$x_{Ct2} = \frac{mx_c + m_{s2} x_{cs2}}{m + m_{s2}} = \frac{R_1^2 [\rho_1 (3l + 2R_1) + \rho_2 (R_1 - 3h)]t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2 (R_1 - 3h)} \quad (17)$$

$$= \frac{3(3h - 25R)R}{10[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]}$$

$$z_{Ct2} = \frac{mz_c + m_{s2} z_{cs}}{m + m_{s2}} = \frac{3\{[\rho_1 (R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2 R_1^2 (2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)]\}}{4\{\rho_1 [3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_1^3)] + \rho_2 R_1^2 (3h - R_1)\}} \quad (18)$$

$$= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]}$$

敬器身正立，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct2} = x_Q = -0.1h$$

且

$$z_{Ct2} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11} h$$

当 $h > R_1$ 时, 由⑱式有

$$h = \frac{1}{3} \left[R_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(3l + 2R_1 - \frac{x_Q R_2^2 (3l + 2R_2)}{R_1^2 (t - x_Q)} \right) \right] = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6} R = 1.23526R \quad \text{⑲}$$

而由 $z_{C12} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11} h$ 得

$$0 < h < 2.67979R \quad \text{或} \quad h < -20.059R$$

故 $h = 1.23526R$ 时欹器正立。

]

(4) 欹器“满则覆”的临界条件是: 系统质心刚好高于悬挂点; 或

$$x_{CH} = -x_Q, \quad z_{CH} = z_Q \quad \text{⑳}$$