翻转陀螺

Part A (10.0 分)

翻转陀螺指的是一种特殊的陀螺，它被转动后可以自行翻转。我们可以将它模拟为一个半径为 R 的球体，有一端被切除后，加上一根短杆。它具有对应于穿过短杆的轴的旋转对称性，该轴与竖直方向成一夹角 θ。沿着此对称转轴，从其质心 C 到几何中心 O 的直线距离为 αR，如图 1(a) 所示。翻转陀螺与地面的接触点为 A；我们假设地面是平面的，并将其称为地板。在某些特定的几何约束条件下，若在最初时，使它旋转得足够快，则翻转陀螺将会倾斜，导致短杆会越来越向下偏，直到开始以杆为支撑继续旋转，最终停下。

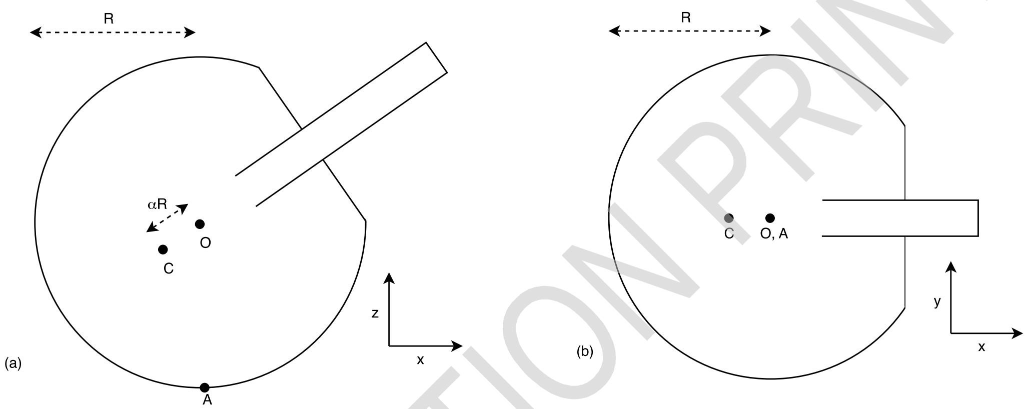

图 1. 翻转陀螺视图 (a) 从侧面，(b) 从上方

以 xyz 代表转动参考系，其 $\hat{\mathbf{z}}$ 轴固定且向上，陀螺的对称轴是在 xz-平面。图 1 所示为 翻转陀螺的侧视图与俯视图。如图 1(b) 所示，当俯视时，陀螺的对称轴是沿着 x 轴。

图 2 所示是陀螺开始转动后，在几个不同阶段的运动情况：

(a) **阶段 I:** 初始刚开始转动后瞬间，角度 $\theta \sim 0$

(b) **阶段 II:** 过后不久，角度已倾斜下偏，角度 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(c) **阶段 III:** 当短杆初次触地，角度 $\theta > \frac{\pi}{2}$

(d) **阶段 IV:** 翻转后，陀螺以杆为支撑做旋转，角度 $\theta \sim \pi$

(e) **阶段 V:** 在最后阶段，陀螺静止停在杆上，$\theta = \pi$.

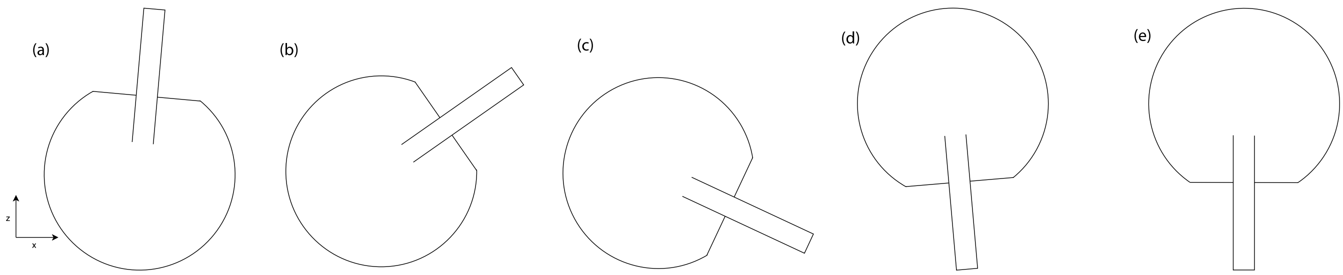

图 2. 阶段 I 到 V 的陀螺运动，图示为在 xz 平面

以 XYZ 代表惯性参考系，支撑陀螺的地面完全在 XY 平面。参考系 xyz 的定义如前所述，将 XYZ 系统绕 Z

轴转动角度 ϕ 后，即与 xyz 重合。由 XYZ 系到 xyz 的转换如图 3(a) 所示，其中 $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{Z}}$。

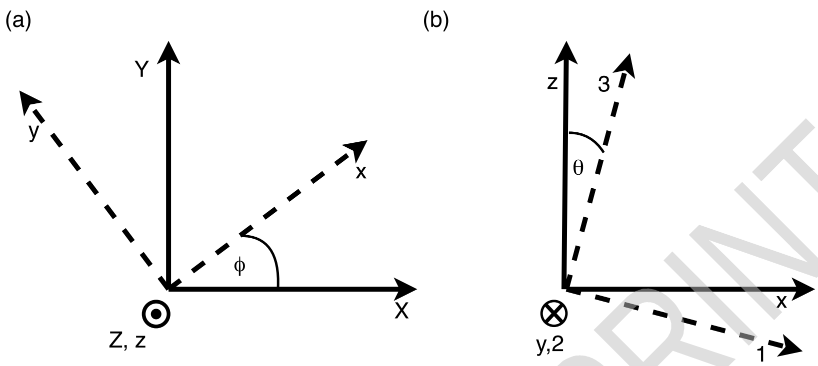

图 3. 两参考系之间的转换：(a) 由 XYZ 到 xyz，(b) 由 xyz 到 123

在 3 维空间的任何转动可用 3 个 欧拉角 (θ, ϕ, ψ) 来描述。惯性系 XYZ, 介乎中间的参考系 xyz 与陀螺参考系 123 之间的转换，可利用 欧拉角 来了解。

在我们对 翻转陀螺 运动的描述中，角度 θ 和 ϕ 分别是 球坐标系中的标准天顶角 (zenith angle) 和方位角 (azimuthal angle)。在 XYZ 系中，它们的定义如下：θ 是竖直轴 Z 到陀螺对称轴的夹角，它代表短杆偏离竖直方向的角度有多大；而 ϕ 则代表陀螺绕 Z 轴转动的角位置，它的定义是 XZ-平面与 O, A, C 所在平面 (即陀螺对称轴的竖直投影) 之间的夹角。

第三个欧拉角 ψ 描述的是陀螺绕其自身对称轴的旋转，即 “自转”，其对应的角速度为 $\dot{\psi}$。

旋转的陀螺参考系被定义为一个新的转动参考系 123，此参考系可由 xyz 系绕 $\hat{\mathbf{y}}$ 轴转一角度 θ 而获得：亦即使 $\hat{\mathbf{z}}$ 轴往下 “倾斜” 一个角度 θ 后，可与陀螺的对称轴 $\hat{\mathbf{3}}$ 重合。由 xyz 系到 123 系的转换如图 3(b) 所示，其中 $\hat{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{y}}$。

注意: 若某个参考系 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 相对于惯性系 $\mathbf{K}$ 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转，则一个向量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{K}$ 系 与 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 系的时间导数具有以下关系：

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\mathbf{K}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\widetilde{\mathbf{K}}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{1}$$

翻转陀螺的运动是很复杂的，它涉及三个 欧拉角随时间的变化，以及陀螺的平移速度 (或位置) 和陀螺对称轴的运动。所有这些参数互相耦合。因此要解这样的问题，需要标准工具，包括使用牛顿定律写出系统的方程，然后计算机编程用数值方法求解。

在此问题，你会进行第一部份，探究 翻转陀螺的物理并建立方程组。

翻转陀螺和它运动时所接触地面之间的摩擦力是其运动的驱动力。假设 翻转陀螺在点 A 处与地板保持接触，直到短杆接触地板为止。陀螺在点 A 相对于地板的速度为 $\mathbf{v}_A$。陀螺与地板间的滑动摩擦系数为 μ_k，因此摩擦力 $|\mathbf{F_f}| = \mu_k N$, 此处 $\mathbf{F}_f = F_{f,x}\hat{\mathbf{x}} + F_{f,y}\hat{\mathbf{y}}$ 以及 N 为正压力的大小。假设最初只令陀螺自旋，即没有受到任何平移的冲量。

以 m 表示翻转陀螺的质量，I_3 表示绕旋转轴的转动惯量，$I_1 = I_2$ 表示为绕另两互相垂直轴的转动惯量。设 $\mathbf{s}$ 是质心位置向量，且 $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ 是由质心到接触点的向量。

除非特别说明，否则请用 xyz 参考坐标系作答以获得满分。除非另有说明，否则所有力矩和角动量均相对于质心 C。你的答案可用 N 表示。除了 **A.8** 部分，你只需考虑当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时的陀螺, 并且短杆不与地面接触。

A.1	求此翻转陀螺所受的总外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$。画出此陀螺投射在 xz 和 xy 平面上的受力图 (free body diagram)，在 xy 平面图上指出 $\mathbf{v}_A$ 的方向。	1pt
A.2	求此 翻转陀螺相对于质心的总外力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$。	0.8pt
A.3	在接触条件下，亦即 $(\mathbf{s}+\mathbf{a})\cdot\hat{z}=0$, 证明在 A 的速度没有 z 方向分量，亦即 $\mathbf{v}_A = v_x\hat{\mathbf{x}}+v_y\hat{\mathbf{y}}$。	0.4pt
A.4	求陀螺相对质心 C 旋转的总角速度 ω，以欧拉角的时间导数：$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$, $\dot{\phi}=\frac{d\phi}{dt}$, 和 $\dot{\psi}=\frac{d\psi}{dt}$ 来表示。使用图 3 分别给出在 xyz 参考系以及 123 参考系中的答案。	0.8pt
A.5	用 v_x, v_y 和欧拉角的时间导数、来表示翻转陀螺的旋转总能量。若是用 $\dot{\mathbf{s}}=\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ 来表示答案也可得部分分数。	1pt
A.6	求出相对 z 轴的角动量的变化率。	0.4pt
A.7	什么力抵抗重力作功？求陀螺的能量的瞬时变化率的表示式，用 $\mathbf{v}_A$ 表示。给出造成 A.5 中的能量变化的力和力矩的分量。	1.4pt
A.8	关于陀螺 在图 2 中所示的五个阶段 I 至 V 的运动，在答案纸中定性地描绘以下能量项作为时间的函数：总能量 E_T, 重力势能 U_G, 平移动能 K_T, 旋转动能 K_R。你所描述的能量轴不需要按比例绘制。	2pt
A.9	证明角动量 $\mathbf{L}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在垂直于 $\hat{\mathbf{3}}$ 方向的分量成正比，也就是 $$\mathbf{L}\times\hat{\mathbf{3}}=k(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{3}}), \quad (2)$$ 以及求正比系数 k.	0.5pt

结合 **A.1**、**A.2** 及接下来的结果可推出正压力 N 的大小以及方程组，和欧拉角、A 点速度的分量 v_x、v_y、对称轴 $\hat{\mathbf{3}}$ 的单位向量，及它们的时间导数有关。此系统是不可积的，但可以用数值方法求解。

运动积分是守恒量，能够减少系统的维度 (也就是需要求解的方程数目，无论用解析或数值方法)。在封闭系统，典型的守恒量包括能量、动量、角动量，它们可明显地简化问题。

A.10	由于耗散力和外力矩的作用，你已经看到翻转陀螺的能量和角动量都不守恒。然而，有一个相关的量，称作 Jellett 积分 λ, 是代表角动量的某一个分量是守恒的，也就是若 $\mathbf{v}$ 是某一个向量，则 $\lambda=\mathbf{L}\cdot\mathbf{v}$ 不随时间变化。 据你对 翻转陀螺的了解以及到目前为止的结果，写出向量 $\mathbf{v}$ 的表达式，并证明 λ 的时间导数为零。	1.7pt